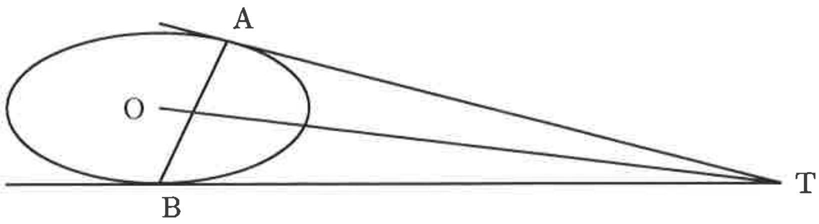
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Geometria II
Kurssikoe 8.5.2024
Petteri Harjulehto

1. Määritä sen ellipsin yhtälö, jonka johtasuora on $y = -\frac{20}{3}$, polttopiste on $(0, 0)$ ja joka kulkee pisteen $(0, -2)$ kautta. Mikä on tämän ellipsin toinen polttopiste?

2. Johda paraabelin $y = x^2$ huippuun piirretyn pääkaarevuusympyrän yhtälö.

3. (a) Osoita, että affiiini kuvaus kuvaa suoran suoraksi.
   (b) Anna esimerkki affiinista kuvauksesta, joka ei säilytä kulman suuruutta.

4. Oletetaan, että ellipsin pisteisiin A ja B piirretyt tangentit leikkaavat pisteessä T. Osoita, että pisteen T ja ellipsin keskipisteen O kautta piirretty suora puolittaa janan AB.



1. Bestäm ekvationen för ellipsen vars styrlinje är $y = -\frac{20}{3}$, brännpunkten är $(0, 0)$ och som går genom punkten $(0, -2)$. Vad är den andra brännpunkten för denna ellips?

2. Härled ekvationen för huvudkrökscirkeln ritad till toppen av parabeln $y = x^2$.

3. (a) Visa att en affin avbildning avbildar en linje till en linje.
   (b) Ge ett exempel på en affin avbildning som inte bevarar vinkelstorleken.

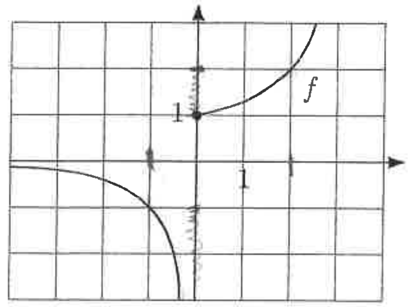
4. Antag att tangenter ritade från ellipsens punkter A och B skär varandra i punkten T. Visa att linjen som passerar genom punkten T och ellipsens mittpunkt O delar segmentet AB på mitten.

Johdatus yliopistomatematiikkaan
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kurssikoe 22.12.2017 (2 sivua)

Ohjeita:

- *Vastaa neljään tehtävään: tehtäviin 1–3 ja lisäksi joko tehtävään 4 tai tehtävään 5.*
- *Ratkaisut voi kirjoittaa samalle konseptiarkille, jos tilaa riittää.*
- *Laskimen käyttäminen on sallittua, taulukkokirjan ei.*
- *Käytä kurssilla opeteltuja ratkaisutapoja ja muista perustella vastauksesi.*

1. a) Tarkastellaan kuvausta $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jonka kuvaaja on alla. Olkoon $A = [-1, 2]$ (suljettu väli). Määritä kuvaajan perusteella joukko $f^{\leftarrow}A$. Perustele lyhyesti kuvaan vedoten.



b) Tarkastellaan kuvausta

$$g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \quad g(n) = n^2 - 2n.$$

Olkoon $B = \{0, 1, 2\}$. Määritä joukko gB. Perustele lyhyesti.

c) Olkoot f ja g kuten edellisissä kohdissa. Määritä joukko $(f \circ g)[B]$. Perustele lyhyesti.

2. a) Osoita matemaattisella induktiolla, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n pätee

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1.$$

b) Oletetaan, että n on kokonaisluku. Tarkastellaan väitettä

"$n^2 - 1$ on jaollinen luvulla 4, jos ja vain jos n on pariton".

Esitä tämän väitteen todistuksen rakenne. Voit valita esitystavan vapaasti, mutta esityksestä täytyy käydä selvästi ilmi, minkälaisia osia todistuksessa on, mitä näistä osista todistetaan epäsuorasti sekä mitkä ovat kuhunkin osaan liittyvät oletukset ja johtopäätökset. Älä kirjoita koko todistusta, vaan esitä vain todistuksen rakenne.

3. Tarkastellaan kuvausta $f\colon [1, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x-1}$ sekä kuvausta $g\colon \mathbb{R} \to [1, \infty[$, $g(x) = x^2 + 1$. Kaverisi on laskenut, että

$$g(f(x)) = (\sqrt{x-1})^2 + 1 = x - 1 + 1 = x.$$

Tämän perusteella hän toteaa, että g on kuvauksen f käänteiskuvaus. Oletko vakuuttunut kaverisi järkeilystä? Onko g todella kuvauksen f käänteiskuvaus? Jos ei ole, voitko löytää kuvaukselle f käänteiskuvauksen?

KÄÄNNÄ

Vastaa vain toiseen seuraavista tehtävistä. Tehtävä 4 liittyy kompleksilukuihin ja tehtävä 5 tietojenkäsittelytieteen matematiikkaan.

4. Tarkastellaan kompleksilukua $z = -3 + 3i$.

   a) Määritä luvun z liittoluku ja käänteisluku. Ilmaise käänteisluku muodossa $a + bi$, missä $a, b \in \mathbb{R}$.

   b) Määritä luvun z eksponenttiesitys ja laske osamäärä $\frac{z}{2e^{i\pi}}$. Anna vastaus eksponenttiesityksessä.

   c) Kirjoita jokin reaalikertoiminen polynomiyhtälö, jolla on yhtenä ratkaisuna luku z. Perustele.

5. a) Erään geometrisen lukujonon (a_n) kolmas jäsen on $a_3 = 5$ ja neljäs jäsen $a_4 = 3$. Määritä lukujonon suhdeluku ja ensimmäinen jäsen.

   b) Ratkaise logaritmien avulla luku x yhtälöstä $b = c \cdot 4^x$, missä luvut b ja c ovat positiivisia reaalilukuja.

   c) Korttipakassa on yhteensä 52 korttia, joista tasan 4 on ässiä. Montako sellaista 5 kortin joukkoa on olemassa, joissa on vähintään 3 ässää? (Voit ilmaista vastauksen kaavan muodossa, jos sinulla ei ole laskinta.)

Johdatus yliopistomatematiikkaan
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kurssikoe 28.10.2016 (2 sivua)

Ohjeita:

- *Vastaa neljään tehtävään: tehtäviin 1–3 ja lisäksi joko tehtävään 4 tai tehtävään 5.*
- *Kaikki ratkaisut voi kirjoittaa samalle konseptiarkille jos tilaa riittää.*
- *Laskimen käyttö on sallittua, taulukkokirjan ei.*
- *Käytä kurssilla opeteltuja ratkaisutapoja ja muista perustella vastauksesi.*

1. a) Tarkastellaan joukkoja $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ ja $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 10\}$. Vastaa lyhyesti perustellen, mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa ja mitkä eivät:

   (i) $A \subset B$ (ii) $1 \in B \setminus A$
   (iii) $A \cup B \subset \mathbb{N}$ (iv) $(B \times A) \cap (\mathbb{N} \times \{0\}) = \emptyset$.

   b) Kirjoita seuraavat luonnollisia lukuja $(0, 1, 2, \ldots)$ koskevat väitteet suomeksi ilman loogisia symboleja ja vastaa perustellen, mitkä väitteistä ovat tosia ja mitkä epätosia:

   (i) $\exists n(n < 5)$. (ii) $\forall n(2n - 1 \geq n)$
   (iii) $\exists m \forall n(n > m \lor n = m)$ (iv) $\forall n(n > 0 \to \exists m(n < m \land m < 2n))$.

2. Osoita matemaattisella induktiolla, että kaikilla luonnollisilla luvuilla n pätee

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2.$$

3. a) Päteekö kaikilla joukoilla A, B ja C seuraava väite: "jos $A \neq B \cup C$, niin $A \setminus C \not\subset B$"? Perustele täsmällisesti.

   b) Kaverisi yrittää todistaa edellisen kohdan väitettä epäsuoralla päättelyllä. Mikä seuraavassa todistuksessa menee pieleen?

   "Käytetään kontrapositiopäättelyä. Oletetaan sitä varten, että $A = B \cup C$, ja pyritään osoittamaan, että $A \setminus C \subset B$. Olkoon $x \in A \setminus C$, jolloin $x \in A$ ja $x \notin C$. Koska $x \in A$, niin oletuksen mukaan joko $x \in B$ tai $x \in C$. Todettiin jo, että $x \notin C$, joten $x \in B$. Näin ollen $A \setminus C \subset B$. On siis osoitettu, että jos $A = B \cup C$, niin $A \setminus C \subset B$. Tämä on loogisesti ekvivalenttia todistettavan väitteen kanssa, joten todistettava väite pätee."

Vastaa vain toiseen seuraavista tehtävistä. Tehtävä 4 liittyy kompleksilukuihin ja tehtävä 5 tietojenkäsittelytieteen ja tilastotieteen matematiikkaan.

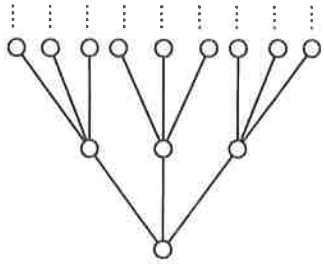
4. a) Määritä seuraavien kompleksilukujen reaali- ja imaginaariosa, liittoluku sekä käänteisluku: $z = 2 - 3i$, $w = (1 + 2i)^2$. Sievennä käänteisluku muotoon $a + bi$, missä $a, b \in \mathbb{R}$. Piirrä luvut z ja w lisäksi kompleksitasoon.

   b) Ratkaise kompleksilukujen joukossa yhtälö $z + z\bar{z} = 1 + i$.

   c) Laske luvun $\dfrac{(1 - 2i)^4}{6 - 8i}$ itseisarvo.

5. a) Selvitä seuraavien lukujen jakojäännökset luvulla 7 jaettaessa: $a = 36$, $b = -18$. Kirjoita perusteluksi vastaava jakoyhtälö (kokonaislukuyhtälö muotoa $a = 7q + r$). Selvitä myös, mikä on luvun ab jakojäännös luvulla 7 jaettaessa.

b) Tertiääripuu on verkko, jonka ensimmäisellä tasolla on yksi solmu (juurisolmu). Tästä solmusta lähtee kolme haaraa toiselle tasolle. Toisella tasolla jokainen haara päättyy solmuun, josta lähtee jälleen kolme haaraa. Sama haarautuminen jatkuu tasolta toiselle (ks. oheinen kuva). Perustele, että kullakin tasolla olevien solmujen lukumäärät muodostavat geometrisen lukujonon. Muodosta summamerkintää käyttäen lauseke, joka kertoo kaikkien tasojen solmujen yhteislukumäärän tasolta 1 tasolle n asti. Laske lopuksi solmujen yhteislukumäärä tasolta 1 tasolle 6 asti.

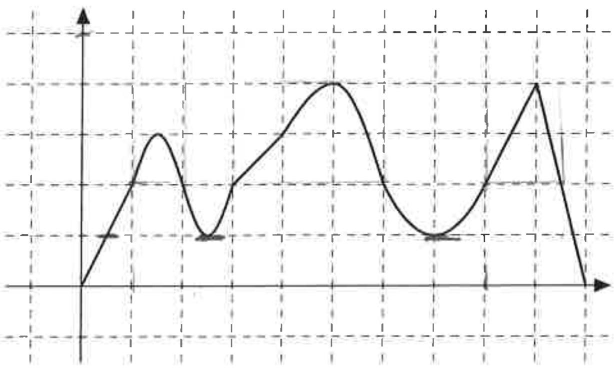


c) Pokerikäsi on 5 kortin osajoukko, joka on poimittu 52 keskenään erilaisen kortin pakasta. Pakan korteista 4 on ässiä. Kuinka monta sellaista pokerikättä on, jotka sisältävät täsmälleen 3 ässää ja 2 mitä tahansa muuta korttia? (Voit ilmaista vastauksen kaavan muodossa, jos sinulla ei ole laskinta.)

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus yliopistomatematiikkaan
2. kurssikoe 14.12.2015

Laskimen käyttö on sallittu. Taulukkokirjan käyttö on kielletty.

1. (a) Tarkastellaan funktiota $f\colon [0,10] \to \mathbb{R}$, jonka kuvaaja on näkyvissä alla. Määritä kuva $f[1,8]$ sekä alkukuvat $f^{\leftarrow}[2,4]$ ja $f^{\leftarrow}\{1,5\}$.



   (b) Tarkastellaan kuvausta $f\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, jolla $f(a,b) = (3a-1, a+b)$ kaikilla $(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Onko kuvaus f injektio? Entä surjektio?

2. (a) Määritellään säännöt τ ja ρ asettamalla $\tau(n) = n^2 - 4n + 3$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja

$$\rho\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a^2+1}{b^2+4}$$

   kaikilla a, $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Onko τ kuvaus $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$? Onko ρ kuvaus $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$?

   (b) Tarkastellaan kuvausta $f\colon \mathbb{R} \to [2,\infty[$, jolla $f(x) = x^2 + 2$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Kurssikaverisi piti tutkia, onko tällä kuvauksella käänteiskuvausta. Hän määritteli kuvauksen $g\colon [2,\infty[\to \mathbb{R}$, jolla $g(x) = \sqrt{x-2}$, ja tutki yhdistettyä funktiota $f \circ g$:

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x-2}\right) = \left(\sqrt{x-2}\right)^2 + 2 = x - 2 + 2 = x.$$

   Tästä hän päätteli, että g on funktion f käänteisfunktio.
   Onko johtopäätös oikea? Miten neuvoisit kurssikaveriasi tässä tehtävässä?

Refleksiivi
Symmetrinen
Transitiivi

3. Määritellään joukon $X = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ relaatio $\sim$ seuraavasti:

$$x \sim y, \text{ jos ja vain jos } x - y = k\sqrt{2} \text{ jollakin } k \in \mathbb{Z}.$$

   (a) Osoita, että relaatio $\sim$ on ekvivalenssirelaatio.

   (b) Määritä ekvivalenssiluokka $[4+5\sqrt{2}]_\sim$. Kirjoita lisäksi näkyviin ainakin kolme eri alkiota, jotka kuuluvat tähän ekvivalenssiluokkaan.

$n = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$

$n^2 \ldots = (n-3)(n-1)$

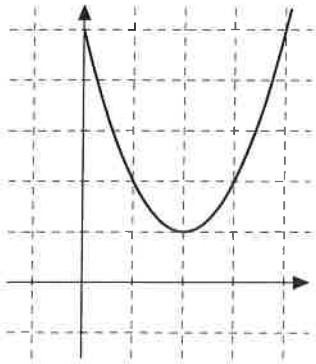
Käännä!

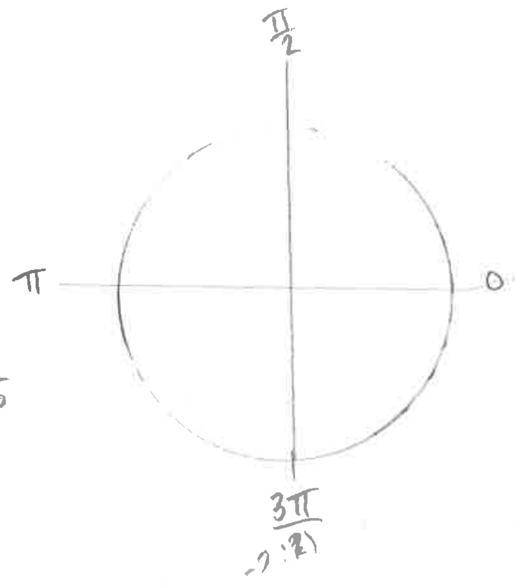
$a = \frac{1}{3}$

$3 \cdot a - 1$

4. (a) Määritä luvun $-125i$ ekponenttiesitys ja ratkaise yhtälö $z^3 = -125i$. Piirrä kuva kompleksitasosta ja merkitse löytämäsi ratkaisut siihen.

(b) Tarkastellaan paraabelia $y = x^2 + kx + 5$. Päättele, mikä parametrin k arvo on alla olevassa kuvassa ja ratkaise yhtälö $x^2 + kx + 5 = 0$.





$(2+i)^2 - 4(2+i) + 5$
$= 4 + 4i + i^2 - 8 - 4i + 5$
$= 0$

$2)\ \frac{2\pi}{3} + 3)\ \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

$\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{8\pi}{6} + \frac{3\pi}{6}$

$= \frac{11\pi}{6}$

HU / Institutionen för matematik och statistik
Inledning till universitetsmatematik
2. kursprov 15.12.2014

Instruktioner:

⋆ *Svara på fyra uppgifter: uppgifterna 1–3 och antingen uppgift 4 eller 5.*

1. (a) Vi definierar reglerna f och g genom

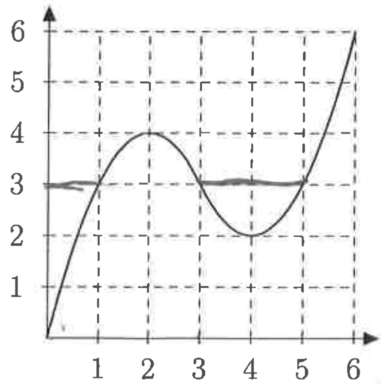
$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{om } x < 4; \\ x, & \text{om } |x| \geq 4, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 3x, & \text{om } x > 4; \\ x^2, & \text{om } |x| \leq 4. \end{cases}$$

Är f en avbildning $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$? Är g en avbildning $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$?

(b) Anta, att $a \in \mathbb{Z}$. Visa med indirekt härledning att om $a^2 - 2a + 7$ är ett udda tal, så är a ett jämnt tal.

2. (a) Vi betraktar funktionen $f \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(m,n) = 2m + n$. Är f en injektion? Är f en surjektion?

(b) Bilden nedan föreställer grafen till en funktion $h \colon [0,6] \to \mathbb{R}$. Bestäm bilden $h[0,3]$ och urbilden $h^{\leftarrow}[0,3]$ utifrån nedanstående bild. Skriv dessutom ut definitionerna för bild och urbild.



3. Vi bestämmer relationen $\sim$ på mängden $\mathbb{Z}$ genom $a \sim b$, om $a^2 - b^2 = 4k$ för något $k \in \mathbb{Z}$.

(a) Visa att $\sim$ är en ekvivalensrelation.

(b) Skriv definitionen för ekvivalensklassen $[1]_\sim$ och räkna upp sex olika element i denna ekvivalensklass.

Obs! Gör antingen uppgift 4 eller 5

4. (a) Skriv talet $1 + i\sqrt{3}$ i exponentiell form.

   (b) Beräkna $(1 + i\sqrt{3})^{10}$ med hjälp av de Moivers formel. Skriv resultatet i formen $a + bi$, där $a,\ b \in \mathbb{R}$.

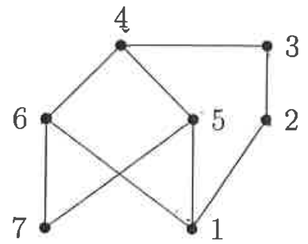
   (c) Lös den komplexa ekvationen $(x^2+6x+13)(x^4+81) = 0$ och märk ut lösningarna i det komplexa planet.

5. (a) Låt $a, b \in \mathbb{Z}$, där $a \equiv 5 \pmod 7$ och $b \equiv 3 \pmod 7$. Bestäm talet $c \in \mathbb{Z}$ för vilket $0 \leq c < 7$ och $a^2 + b \equiv c \pmod 7$.

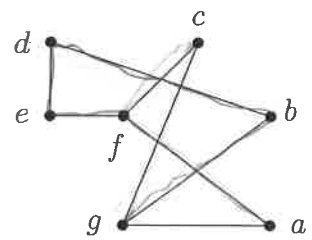
   (b) Bestäm största gemensamma faktorn av talen 66 och 420, dvs. sgf(66,420). Bestäm två tal $x, y \in \mathbb{Z}$ som satisfierar ekvationen

$$60 = 66x + 420y$$

   (c) Är grafen G tudelad? Är H tudelad? Är G och H isomorfa? Motivera svaren kort.



G



H

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus yliopistomatematiikkaan
2. kurssikoe 15.12.2014

Ohjeita:

- ⋆ *Kaikki ratkaisut voi kirjoittaa samalle konseptiarkille, jos tila riittää.*
- ⋆ *Käytä kurssilla opetettuja ratkaisutapoja ja muista perustella vastauksesi.*
- ⋆ *Tehtäviä ei ole järjestetty vaikeustason mukaan.*

1. (a) Määritellään säännöt f ja g asettamalla

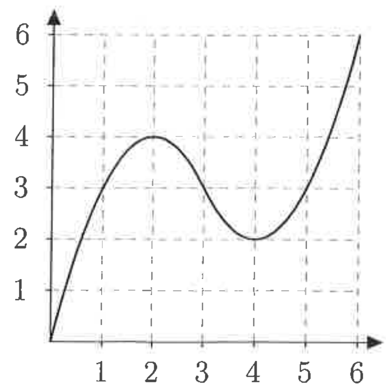
$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{jos } x < 4; \\ x, & \text{jos } |x| \geq 4, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 3x, & \text{jos } x > 4; \\ x^2, & \text{jos } |x| \leq 4. \end{cases}$$

Onko f kuvaus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$? Entä onko g kuvaus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$?

(b) Oletetaan, että $a \in \mathbb{Z}$. Osoita epäsuoraa päättelyä käyttäen, että jos $a^2 - 2a + 7$ on pariton, niin a on parillinen.

2. (a) Tarkastellaan funktiota $f\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, jolla $f(m,n) = 2m+n$. Onko f injektio? Entä surjektio?

(b) Alla on näkyvissä funktion $h\colon [0,6] \to \mathbb{R}$ kuvaaja. Määritä sen avulla kuva $h[0,3]$ ja alkukuva $h^{\leftarrow}[0,3]$. Anna lisäksi kuvan ja alkukuvan käsitteiden määritelmät.



3. Määritellään joukon $\mathbb{Z}$ relaatio asettamalla $a \sim b$, jos $a^2 - b^2 = 4k$ jollakin $k \in \mathbb{Z}$.

(a) Osoita, että $\sim$ on ekvivalenssirelaatio.

(b) Kirjoita määritelmä ekvivalenssiluokalle $[1]_\sim$ ja luettele kuusi eri alkiota tästä ekvivalenssiluokasta.

4. (a) Muodosta luvun $1 + i\sqrt{3}$ napaesitys tai eksponenttiesitys.

(b) Laske Moivren kaavan avulla $(1+i\sqrt{3})^{10}$. Kirjoita tulos muodossa $a+bi$, missä $a,\ b \in \mathbb{R}$.

(c) Ratkaise kompleksilukujen joukossa yhtälö $(x^2+6x+13)(x^4+81) = 0$ ja merkitse löytämäsi ratkaisut kompleksitasoon.

HU / Institutionen för matematik och statistik
Inledning till universitetsmatematik
1. kursprov 20.10.2014

Instruktioner:

- ⋆ ***Svara på fyra uppgifter**: uppgifterna 1–3 samt antingen uppgift 4 eller uppgift 5.*
- ⋆ *Alla lösningar kan skrivas på samma konseptpapper om det finns nog med utrymme.*
- ⋆ *Använd lösningsmetoder som du lärt dig på kursen och kom ihåg att motivera dina svar.*

1. (a) Skriv följande mängd i formen $\{x \in X \mid \text{villkor som } x \text{ satisfierar}\}$: alla heltal som är den tredje potensen av något naturligt tal.

   (b) Vi betraktar mängden $A = \{1, \{1,2\}, \{2\}, 3, \{3\}\}$. Motivera, vilka av följande påståenden är sanna och vilka som är falska.

   i. $\{1,2\} \subset A$ ii. $\emptyset \in A$ iii. $(4,3) \in \mathbb{Q} \times A$

   iv. $\{1,3\} \subset A$ v. $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$

2. Visa med induktion, att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller

$$1 \cdot 3^0 + 3 \cdot 3^1 + 5 \cdot 3^2 + \cdots + (2n+1) \cdot 3^n = n \cdot 3^{n+1} + 1.$$

3. Anta, att X är en mängd och att A, B, C och Y är delmängder till X. Är följande påståenden sanna för alla mängder A, B, C, Y och X?

   (a) Om $A \cap C = \emptyset$, så gäller $A \cup (B \setminus C) \subset (A \cup B) \setminus C$.

   (b) Om $Y \subset \complement(A \setminus B)$, så gäller $Y \subset B$.

4. (a) Bestäm realdelen, imaginärdelen, multiplikativa inversen och konjugatet till z då

$$z = \frac{3-4i}{1+2i}.$$

   Rita en bild där det framstår vilken punkt i det komplexa planet motsvarar talet z. Märk även ut additiva och multiplikativa inversen samt konjugatet till talet z.

   (b) Vi antar, att $z, w \in \mathbb{C}$. Visa, att $z\bar{w} + \bar{z}w$ är reellt.

5. (a) Är följande påståenden gällande heltal sanna eller falska? Motivera! Bilda även ett ekvivalent påstående till negationen av påstående i där negationssymbolen $\neg$ inte förekommer.

   i. $\forall x(x^2 > x \wedge x + 2 > x)$ ii. $\forall x \exists y(xy = 0 \wedge x + y < 0)$

   iii. $\exists x \forall y(xy = 0 \vee xy = 1)$

   (b) En glasskiosk säljer 30 liter glass den 1 juli. Därefter ökar försäljningen varje dag med 2% ända fram till 1 augusti. Därefter minskar försäljningen varje dag med 1%. Hur många liter glass såldes den 31 augusti? Hur många liter glass såldes totalt under tiden 1.7-31.8?
   (Kom ihåg: juli har 31 dagar)

AVDELNINGEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
MAT11003 Gränsvärden
Kursprov 24.10.2019 kl 12.00-14.30

Tillåtna hjälpmedel: skrivmaterial och kalkylator.

1 Bestäm med hjälp av kursens kunskaper

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)(4n+5)}{6n^2+7}.$$

I uppgiften får du använda kunskaper om gränsvärdet av en konstant talföljd och talföljden $(\frac{1}{n})$, samt kursens satser om gränsvärdet av en talföljd. Motivera ditt svar noggrant!

2 Visa enbart på basen av definitionen för gränsvärdet av en talföljd att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n+5}{6n+7} = \frac{2}{3}.$$

3 Vi betraktar den talföljd (x_n) som definieras av villkoren $x_1 = 3$ och

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \sqrt{x_n})$$

Visa att talföljden konvergerar och bestäm dess gränsvärde. I uppgiften får du använda kunskapen att $\sqrt{c} \leq \sqrt{d}$ då $0 \leq c \leq d$.

4 Vi betraktar den funktion f som definieras på intervallet $[1, 3]$ av ekvationen

$$f(x) = \frac{x+3}{3x+1}.$$

Visa enbart på basen av definitionen för gränsvärdet av en funktion att

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{5}{7}.$$

of of
and and
lim
of
f
of

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Gränsvärden 2016

Kursprov 27.10.2016

1 Bestäm

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+n^2}{n+n^2}$$

på basen av kursens kunskaper. I uppgiften får man känna till gränsvärdet för en konstant talföljd och följden $(\frac{1}{n})$, samt satser som berör gränsvärdet för talföljder. Motivera ditt svar noggrant!

2 Anta att det reella talet x satisfierar olikheterna $|x-1| < 3$ och $|x-7| < 5$. Visa att talet x då också satisfierar olikheten $|x-3| < 1$.

3 Visa på basen av definitionen för att en talföljd går mot ∞ (dvs. växer obegränsat) att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n+1} = \infty.$$

4 Betrakta den funktion f som är definierad i intervallet $[1, 3]$ med ekvationen

$$f(x) = \frac{x+3}{x+8}.$$

Visa på basen av definitionen av gränsvärdet för en funktion att

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{1}{2}.$$

9

AVDELNINGEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
MAT11004 Differentialkalkyl
Kursprov 17.12.2019 kl 12.00-14.30

Tillåtna hjälpmedel: skrivmaterial och kalkylator.

Lämna utrymme överst på svarspappret för anteckning av poängtalen!

1 Bestäm

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3}{4x^5+6}$$

med hjälp av kursens satser om gränsvärdet av funktioner. I uppgiften får du också använda kunskaper om gränsvärdet av en konstant funktion och av funktionen $f(x) = x$. Motivera noggrant!

2 Man betraktar funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som definieras av ekvationen

$$f(x) = x^2 - \sin x.$$

Visa med hjälp av de egenskaper om kontinuerliga funktioner som behandlats på kursen att det finns ett minsta värde i mängden av värden som funktionen f antar. I uppgiften får man anta som känt att funktionen f är kontinuerlig.

3 Man betraktar funktionen $f :]0, \infty[\to]0, \infty[$ som definieras av ekvationen

$$f(x) = x^{2019} + x.$$

Visa med hjälp av kursens kunskaper att funktionen f har en strängt växande deriverbar invers funktion $f^{-1}\colon\ ]0, \infty[\to]0, \infty[$. Bestäm derivatan $(f^{-1})'(2)$ av den inversa funktionen.

4 Visa med hjälp av kursens kunskaper att för varje $x \geq 4$ gäller olikheten

$$\sqrt{x} \leq \frac{1}{4}x + 1.$$

Det lönar sig att betrakta hjälpfunktionen som definieras av ekvationen

$$f(x) = \frac{1}{4}x + 1 - \sqrt{x}.$$

Differentialkalkyl, våren 2019
Kursprov 4.3.2019

I kursprovet får man använda en kalkylator, men inga andra hjälpmedel (det är exempelvis inte tillåtet att använda en tabellbok). Kom ihåg att motivera dina lösningar noggrant. **Obs.** Ett svar som erhållits med en kalkylator räcker inte som motivering i någon av uppgifterna.

1. Sök sådana reella tal a och b att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{då } -1 \le x < 1, \\ ax+b, & \text{då } 1 \le x < 2 \\ 3x, & \text{då } 2 \le x < 4 \end{cases}$$

är kontinuerlig i sin definitionsmängd $[-1, 4)$. Motivera din lösning.

2. Bestäm de lokala extremvärdespunkterna och de lokala extremvärdena till funktionen $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}\,(x-5)^2}{4}.$$

Har funktionen ett största eller ett minsta värde?

3. Anta att funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfierar villkoren

$$\sin x \le f(x) \le x$$

för varje $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ och $f(-x) = -f(x)$ då $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Visa att f är deriverbar i punkten $x = 0$ och $f'(0) = 1$.

4. Man definierar funktionen $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ på följande sätt

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x+2}}$$

för alla $x \in [0, \infty)$. Visa att funktionen f har en invers funktion $f^{-1} : f([0, \infty)) \to [0, \infty)$. Bestäm definitionsmängden till den inversa funktionen. Beräkna $(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$.

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Differentialkalkyl
Kursprov
22.12.2016

Tid: 2 t 30 min

Lämna utrymme ovan på första sidan av svarspappret för anteckning av poängtalen.

1. Visa att

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+2}{x-2} = \infty.$$

2. Betrakta den funktion $f\colon [0,2] \to [0,160]$ som definieras av ekvationen $f(x) = x^5 + x^7$. Visa att funktionen f har en strängt växande kontinuerlig invers funktion $g\colon [0,160] \to [0,2]$, som är deriverbar i intervallet $]0,160[$. Bestäm $g'(2)$.

3. Visa att den funktion som definieras av ekvationen $f(x) = |x^2 - 2x|$ inte är deriverbar i punkten $x = 2$.

4. Betrakta den funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som definieras av ekvationen

$$f(x) = \frac{x^2 \sin(e^{x^2})}{(x^4+1)e^{\sin x}}.$$

Visa att det finns ett reellt tal $a \in \mathbb{R}$, så att det för alla $x \in \mathbb{R}$ gäller att $f(x) \leq f(a)$. Obs.: I denna uppgift lönar det sig inte att undersöka derivatan!

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Differentiaalilaskenta
Kurssikoe
22. 12. 2016

Laskuaikaa 2,5 tuntia

Jätä ensimmäisen sivun yläreunaan tilaa pisteiden merkitsemistä varten.

1. Osoita, että

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x+2}{x-2} = \infty.$$

2. Tarkastellaan yhtälöllä $f(x) = x^5 + x^7$ määriteltyä funktiota $f\colon [0,2] \to [0,160]$. Osoita, että funktiolla f on aidosti kasvava jatkuva käänteisfunktio $g\colon [0,160] \to [0,2]$, joka on derivoituva välillä $]0,160[$. Määritä $g'(2)$.

3. Osoita, että yhtälöllä $f(x) = |x^2 - 2x|$ määritelty funktio ei ole derivoituva kohdassa $x = 2$.

4. Tarkastellaan yhtälöllä

$$f(x) = \frac{x^2 \sin(e^{x^2})}{(x^4+1)e^{\sin x}}$$

määriteltyä funktiota $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Osoita, että on olemassa reaaliluku $a \in \mathbb{R}$, jolle kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $f(x) \leq f(a)$. Huom: Tässä tehtävässä ei kannata tarkastella derivaattaa!

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaalilaskenta
Kurssikoe 17.12.2015

1. Tutki jatkuvuuden (ε, δ)-määritelmän avulla, onko funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{4} + 2, & x < 4, \\ \dfrac{x}{4}, & x \geqslant 4, \end{cases}$$
jatkuva pisteessä $x = 4$.

2. Olkoon $f\colon [-1, \infty) \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = xe^{-x}, \quad x \geqslant -1.$$
(a) Määritä funktion f lokaalit ääriarvokohdat.
(b) Määritä funktion f pienin ja suurin arvo.

3. Tarkastellaan yhtälöä $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 4$, kun $x \geqslant 0$.
(a) Osoita, että yhtälöllä on ratkaisu.
(b) Osoita, että yhtälöllä on täsmälleen yksi ratkaisu.

4. Positiivisten lukujen a ja b *geometrinen keskiarvo* on $\sqrt{ab}$. Osoita, että lukujen a ja b, missä $b > a > 0$, geometrinen keskiarvo saadaan väliarvolauseessa esiintyvästä pisteestä $\xi \in (a, b)$ funktiolle $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Huom! Laskimella saatu vastaus ei missään tehtävässä riitä perusteluksi.

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys I

1. kursprovet 23.10.2014

Lämna utrymme ovan på första sidan av svarspappret för antecknandet av poängtalen.

1. Bestäm

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+n}{n^3+1}.$$

I uppgiften får man använda kursens satser och kunskaper om gränsvärdet av konstanta talföljder och talföljden (x_n), där $x_n = \frac{1}{n}$ för alla n.

2. Visa på basen av definitionen för gränsvärdet av en talföljd att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n+3}{n+1} = 4.$$

(I uppgiften får man alltså inte hänvisa till de satser som bevisats på kursen som berör gränsvärdet av talföljder.)

3. Visa på basen av definitionen för gränsvärdet av en funktion att

$$\lim_{x\to 3} x^2 = 9.$$

4. Anta att A är en icke-tom uppåt begränsad mängd av positiva reella tal och att $a = \sup A$. Vi betecknar

$$B = \{-2x \mid x \in A\}.$$

Visa noggrant att $-2a = \inf B$.

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys I

1. kursprovet 18.10.2012

1. Bestäm

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n+1}{n^2+2n+3}.$$

I uppgiften får man använda kursens satser samt kunskap om gränsvärden för konstanta talföljder och talföljden $(\frac{1}{n})$. Motivera noggrant!

2. Visa med hjälp av definitionen av gränsvärdet för en talföljd att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+1} = \frac{2}{3}.$$

3. Visa med hjälp av definitionen av gränsvärdet för en funktion att

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x+1}{3x+1} = \frac{5}{7}.$$

4. Anta att

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -1 \quad \text{och} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \infty.$$

Visa att

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \infty.$$

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
2. kursprovet
16.12. 2010

1. Bestäm

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-1}{x^4+1}$$

med hjälp av kursens satser. Motivera noggrant!

2. Funktionen f satisfierar för alla $x \leq 0$ villkoret $f(x) = x^3$ och för alla $x > 0$ villkoret $f(x) = x^2$. Är f deriverbar i punkten $x = 0$? Motivera noggrant!

3. Visa att det finns $a \in \mathbb{R}$, så att för alla $x \in \mathbb{R}$ gäller

$$\frac{\sin(e^x)}{x^2+1} \leq \frac{\sin(e^a)}{a^2+1}.$$

I uppgiften lönar det sig kanske inte att använda derivatan.

4. Definiera funktionen $f\colon]0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ med villkoret

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Visa att f är strängt avtagande.

4. Lösn. monotonicitet $\Leftrightarrow$ tecknet för f' (söker $f'(x)<0 \ \forall x \in (0,\frac{\pi}{2})$)

$f'(x) = D(\frac{\sin x}{x}) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$x \mapsto x\cos x - \sin x$ då $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$\cos x > 0$

$g(x): x \mapsto x - \frac{\sin x}{\cos x} = x - \tan x$

Visa $g(x) < 0$, $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$g'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x} < 0$ i $(0, \frac{\pi}{2})$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow g \downarrow \text{ i } (0,\frac{\pi}{2}) \\ \text{kont. i } (0, \pi/2) \end{array}\right\} \Rightarrow g(x) = x - \tan x < g(0) = 0 \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow f'(x) < 0$ i $(0, \pi/2)$

$\Rightarrow f \downarrow$

Integralkalkyl 2024
Examen

Till tenten får du ta med dig 7 ensidiga A4-sidor handskrivna anteckningar. Inga böcker, miniräknare, mobiltelefoner, datorer, etc.

Besvara fyra uppgifter.

1. Beräkna integralen $\int_0^1 \frac{x^2+2x-4}{(x+2)(x-2)}dx$.

2. Låt $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{när } x = \frac{1}{k}, k = 1, 2, \ldots, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$
Ge en uppdelning av intervallet $[0,1]$ så att skillnaden mellan över- och undersumman för funktionen f är högst $\frac{1}{10}$.

3. Markus beräknar derivatan f' på följande sätt, när $f(x) = \int_0^{e^x} \sin e^t\, dt$:

   Enligt analysens grundsats är derivering och integration inversa operationer. Således är
$$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^{e^x} \sin e^t\, dt = [\sin e^t]_0^{e^x} = \sin e^{e^x} - \sin e.$$
Sök felet i resonemanget och presentera en korrekt härledning av derivatan.

4. Konvergerar eller divergerar integralen $\int_0^1 \frac{x + \ln x + e^x}{\sin x + \ln x + x^2 + e^{2x}}dx$? Kom ihåg att motivera ditt svar.

5. Låt (f_k) vara en följd av funktioner $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$, med ett tal $M > 0$ sådant att
$$|f_{k+1}(x) - f_k(x)| \le M2^{-k}$$
för alla $x \in [a,b]$ och $k = 1, 2, \ldots$. Visa att f_n konvergerar likformigt mot någon funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Lycka till med tenten och tack för kursen!

Integraalilaskenta kevät 2024
Tentti

Tenttiin saa tuoda 7 yksipuolisen A4-sivun verran omakätisiä muistiinpanoja. Ei kirjoja, laskimia, kännyköitä, tietokoneita, jne.

Vastaa neljään tehtävään.

1. Laske integraali $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+2x-4}{(x+2)(x-2)}\,dx$.

2. Olkoon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x = \frac{1}{k}, k = 1, 2, \ldots, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$
Etsi sellainen välin $[0,1]$ jako, että sitä vastaavien ylä- ja alasumman erotus funktiolle f on korkeintaan $\frac{1}{10}$.

3. Markus laskee seuraavasti derivaattaa f', kun $f(x) = \int_0^{e^x} \sin e^t\,dt$:

   Analyysin peruslauseen mukaan derivointi ja integrointi ovat käänteisiä operaatioita. Siten
$$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^{e^x} \sin e^t\,dt = [\sin e^t]_0^{e^x} = \sin e^{e^x} - \sin e.$$
   Etsi päättelystä virhe ja esitä korjattu derivaatan lasku.

4. Suppeneeko vai hajaantuuko integraali $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+\ln x + e^x}{\sin x + \ln x + x^2 + e^{2x}}\,dx$? Muista perustella vastauksesi.

5. Olkoon (f_k) jono sellaisia funktioita $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$, että on olemassa $M > 0$, jolle
$$|f_{k+1}(x) - f_k(x)| \le M2^{-k}$$
kaikilla $x \in [a,b]$ ja $k = 1, 2, \ldots$. Osoita, että f_n suppenee tasaisesti kohti jotakin funktioita $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Onnea tenttiin ja kiitos kurssista!

HY / Matematiikan ja tilastotieteen osasto
MAT11005/AYMAT11005: Integraalilaskenta
Kurssikoe 2.3.2020
Sallitut apuvälineet: Ei apuvälineitä.

t1. (6p.) Laske

$$\int_0^\pi x \sin(x)\, dx.$$

Perustele vastauksesi.

t2. (6p.) Suppeneeko epäoleellinen integraali

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x}\, dx?$$

Perustele vastauksesi.

t3. (6p.) Laske

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 \left(\frac{x}{2+x^2} + \frac{1}{n}\sin(x^2)\right)\, dx.$$

Perustele vastauksesi.

t4. (6p) Olkoon $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ integroituva funktio ja olkoon $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ sellainen funktio, että $g(x) = f(x)$ kaikilla $x \in]0,1]$. Osoita, että g on integroituva.

$\frac{1}{2}\int \frac{x}{(\frac{1}{\sqrt{2}}x)^2+1}$

$\frac{1}{2} / \frac{1}{2}\ln|(\frac{1}{\sqrt{2}}x)$

$\int \frac{x}{2+x^2}\, dx$

$y = 2+x^2$

$\frac{dy}{dx} = 2x$

$dx = \frac{dy}{2x}$

$= \int x \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{2x} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\ln|y|$

Avdelningen för matematik och statistik
MAT11005 Integralkalkyl
Kursprov 2 h 30 min
8.5.2018

I kursprovet får man använda en räkneapparat, men inga andra hjälpmedel (det är exempelvis inte tillåtet att använda en tabellsamling).

1. Beräkna integralen $\int_1^e \frac{1}{x}(1 + \ln x)^5 \, dx$.

2. Varför är integralen $\int_1^\infty \frac{x+1}{x^2 + 2x} \, dx$ oegentlig? Undersök om den konvergerar.

3. Låt $f\colon [-2, 2] \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} 1, & -2 \leqslant x < -1, \\ -1, & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2, & 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$$
och låt J vara delningen $-2, -1 - \frac{1}{n}, -1, 1, 1 + \frac{1}{n}, 2$ av intervallet $[-2, 2]$, då $n \in \mathbb{N}_1$, $n \geqslant 2$.
   (a) Beräkna översumman $\overline{S}_J(f)$ och undersumman $\underline{S}_J(f)$ som hör till delningen J för funktionen f.
   (b) Visa med hjälp av Riemanns integrerbarhetsvillkor att f är integrerbar. Vad är integralens värde?

4. Låt $f_n\colon [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{-nx}$, $n \in \mathbb{N}_1$.
   (a) Bestäm gransvärdesfunktionen $f\colon [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f = \lim_{n\to\infty} f_n$.
   (b) Är konvergensen $f_n \to f$ likformig på intervallet $[0, 3]$?

Obs! Ett svar som erhållits med en räkneapparat räcker inte som motivering i någon av uppgifterna.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Institutionen för matematik och statistik
Integralkalkyl
Kursprov 10.3.2016

1. Beräkna integralerna (a) $\int xe^{3x}\,dx$ och (b) $\int_0^1 (3x-2)^{99}\,dx$.

2. Undersök om den oegentliga integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^6+1}}$ konvergerar.

3. Låt $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ vara funktionen $f(x) = x^2$, $x \in [-1,1]$.
   (a) Undersök om det finns en delning J av intervallet $[-1,1]$, för vilken skillnaden av över- och undersumman satisfierar $\overline{S}_J(f) - \underline{S}_J(f) > 2$.
   (b) Bestäm de punkter $z \in (-1,1)$ som förekommer i integralkalkylens medelvärdessats för integralen
$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx.$$
   Rita en bild som åskådliggör den geometriska tolkingen av integralkalkylens medelvärdessats, från vilken framgår de områden i planet som har samma area.

4. Låt $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$, $n \in \mathbb{N}_1$.
   (a) Bestäm gränsfunktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$.
   (b) Är konvergensen $f_n \to f$ likformig i intervallet $[0,1]$?
   (c) Beräkna $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

Obs! Ett svar som erhållits med hjälp av en kalkylator räcker inte som motivering i någon av uppgifterna.

Advanced Calculus MAT11008

Course Examination

March 4, 2019

Not any kind of notes are allowed in the exam. A calculator is allowed.

Solve each problem. Justify your answers by presenting steps of reasoning or computations as well as justifications for using known rules and results when needed.

1. Use the Triangle Inequality to show that
$$|a-b| \geq \big||a|-|b|\big|.$$

2. Let $S = \left\{\frac{\sqrt{x}}{x+1} \ : \ x > 0\right\}$. Show that $\sup S = \frac{1}{2}$ and $\inf S = 0$.

3. Let $a_0 \geq 3$ and $a_{n+1} = 1 + \sqrt{1 + a_n}$ for $n \in \mathbb{N}$.
   a. Show by induction that $a_n \geq 3$ for all $n \in \mathbb{N}$.
   b. Show that the sequence (a_n) is decreasing.
   c. Find the limit of the sequence.

4. Assume the function f is defined on a closed interval I and furthermore there is a number M so that
$$|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|$$
whenever $x, x_0 \in I$.

   Show that f is uniformly continuous.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI
Institutionen för matematik och statistik
Serier
Kursprov 11.5.2017

1. Undersök om serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{1/k}}{k^2}$ konvergerar.

2. Bestäm potensseriens $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{\ln(k+2)}$ konvergensradie och -intervall.

3. Bestäm ett närmevärde till talet $\sqrt[4]{e} = e^{1/4}$, vars fel är mindre än 0,0001. Använd funktionens $f(x) = e^x$ Taylor polynom $T_n(x; 0)$ och Lagranges form av resttermen genom att först söka ett tillräckligt stort $n \in \mathbb{N}_1$.

4. Låt (a_{k_j}) vara en delföljd till följden (a_k).
   (a) Visa att om serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar absolut, så konvergerar också serien $\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j}$ absolut.
   (b) Visa att från den absoluta konvergensen av serien $\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j}$ inte nödvändigtvis följer att serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar absolut. Det omvända resultatet till resultatet i del (a) gäller alltså inte.

Obs! Ett svar som har erhållits med hjälp av en kalkylator räcker inte som motivering i någon av uppgifterna.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Sarjat
Kurssikoe 11.5.2017

1. Tutki, suppeneeko sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{1/k}}{k^2}$.

2. Määritä potenssisarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{\ln(k+2)}$ suppenemissäde ja -väli.

3. Määritä luvun $\sqrt[4]{e} = e^{1/4}$ likiarvo, jonka virhe on pienempi kuin 0,0001. Käytä funktion $f(x) = e^x$ Taylorin polynomia $T_n(x; 0)$ ja Lagrangen jäännöstermimuotoa etsimällä ensin riittävän suuri $n \in \mathbb{N}_1$.

4. Olkoon (a_{k_j}) jonon (a_k) osajono.
   (a) Osoita, että jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee itseisesti, niin sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j}$ suppenee itseisesti.
   (b) Osoita, että sarjan $\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j}$ itseisestä suppenemisesta ei välttämättä seuraa sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ itseinen suppeneminen. Kohdan (a) tulokselle käänteinen tulos ei siis päde.

Huom! Laskimella saatu vastaus ei missään tehtävässä riitä perusteluksi.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Institutionen för matematik och statistik
Analys II
Kursprov 2, 7.5.2015

1. Undersök om serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2/3}}{10^k}$ konvergerar.

2. Bestäm potensseriens $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^k}(x-5)^k$ konvergensradie, centrum och konvergensintervall.

3. Låt $f_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{(n+1)x}{n}$, $n \in \mathbb{N}_1$.
   (a) Bestäm gränsfunktionen $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $f = \lim_{n\to\infty} f_n$.
   (b) Är konvergensen $f_n \to f$ likformig i intervallet $[0,2]$?
   (c) Beräkna $\lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)\,dx$.

4. (a) Bestäm Taylorutvecklingen $f(x) = T_2(x;0) + x^2\varepsilon(x)$ för funktionen $f(x) = \ln(1+x)$.
   (b) Anta att $g\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ är två gånger kontinuerligt deriverbar och $g(0) = 0$ samt $g'(0) = 2$. Beräkna
$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)^2}{\ln(1+x) - x}.$$

Obs! Ett svar som erhållits med hjälp av en kalkylator räcker inte som motivering i någon av uppgifterna.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Institutionen för matematik och statistik
Analys II
Kursprov 2, 7.5.2015

$$\frac{\frac{k!}{2^k}}{\frac{(k+1)!}{2^{k+1}}} = \frac{k!}{2^k} \cdot \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{2}{k+1}$$

1. Undersök om serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2/3}}{10^k}$ konvergerar.

2. Bestäm potensseriens $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^k}(x-5)^k$ konvergensradie, centrum och konvergensintervall.

3. Låt $f_n \colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{(n+1)x}{n}$, $n \in \mathbb{N}_1$.
   (a) Bestäm gränsfunktionen $f \colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $f = \lim_{n\to\infty} f_n$.
   (b) Är konvergensen $f_n \to f$ likformig i intervallet $[0,2]$?
   (c) Beräkna $\lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)\,dx$.

4. (a) Bestäm Taylorutvecklingen $f(x) = T_2(x;0) + x^2\varepsilon(x)$ för funktionen $f(x) = \ln(1+x)$.
   (b) Antag att $g \colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ är två gånger kontinuerligt deriverbar och $g(0) = 0$ samt $g'(0) = 2$. Beräkna
$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)^2}{\ln(1+x) - x}.$$

Obs! Ett svar som erhållits med hjälp av en kalkylator räcker inte som motivering i någon av uppgifterna.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Analyysi II
Kurssikoe 2, 7.5.2015

1. Tutki, suppeneeko sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2/3}}{10^k}$.

2. Määritä potenssisarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^k}(x-5)^k$ suppenemissäde, keskus ja suppenemisväli.

3. Olkoot $f_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{(n+1)x}{n}$, $n \in \mathbb{N}_1$.
   (a) Määritä rajafunktio $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $f = \lim_{n\to\infty} f_n$.
   (b) Onko suppeneminen $f_n \to f$ tasaista välillä $[0,2]$?
   (c) Laske $\lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)\,dx$.

4. (a) Muodosta funktiolle $f(x) = \ln(1+x)$ Taylorin kehitelmä $f(x) = T_2(x;0) + x^2\varepsilon(x)$.
   (b) Oletetaan, että $g\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ on kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva ja $g(0) = 0$ sekä $g'(0) = 2$. Laske
$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)^2}{\ln(1+x) - x}.$$

Huom! Laskimella saatu vastaus ei missään tehtävässä riitä perusteluksi.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Institutionen för matematik och statistik
Analys II
Kursprov 1
5.3.2015

1. (a) Bestäm konstanterna A och B så att
$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}.$$
(b) Beräkna $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2+x-2}$.

2. Undersök ifall den oegentliga integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x}{x}\,dx$ konvergerar.

3. Låt $f\colon [1,4] \to \mathbb{R}$ vara funktionen
$$f(x) = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 2, & 2 < x < 3, \\ 3, & 3 \leqslant x \leqslant 4, \end{cases}$$
och låt $1, 2, 2+\frac{1}{n}, 3-\frac{1}{n}, 3, 4$ vara indelningen J av intervallet $[1,4]$, där $n \in \mathbb{N}_1$, $n \geqslant 3$.
(a) Beräkna undersumman $\underline{S}_J(f)$ och översumman $\overline{S}_J(f)$.
(b) Visa på basen av del (a) och Riemanns integrerbarhetsvillkor att f är integrerbar.

4. (a) Låt $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ vara en funktion, vars andra derivata f'' är kontinuerlig på intervallet $[-1,1]$. Visa att
$$\int_{-1}^{1} x f''(x)\,dx = f'(1) + f'(-1) - f(1) + f(-1).$$
(b) Beräkna
$$\int_{-1}^{1} x e^x\,dx.$$

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Analyysi II
Kurssikoe 1
5.3.2015

1. (a) Määritä vakiot A ja B siten, että
$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}.$$
(b) Laske $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2+x-2}$.

2. Tutki, suppeneeko epäoleellinen integraali $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x}{x}\,dx$.

3. Olkoon $f\colon [1,4] \to \mathbb{R}$ funktio
$$f(x) = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 2, & 2 < x < 3, \\ 3, & 3 \leqslant x \leqslant 4, \end{cases}$$
ja olkoon $1, 2, 2+\frac{1}{n}, 3-\frac{1}{n}, 3, 4$ välin $[1,4]$ jako J, missä $n \in \mathbb{N}_1$, $n \geqslant 3$.
(a) Laske alasumma $\underline{S}_J(f)$ ja yläsumma $\overline{S}_J(f)$.
(b) Osoita kohdan (a) ja Riemannin integroituvuusehdon perusteella, että f on integroituva.

4. (a) Olkoon $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ funktio, jonka toinen derivaatta f'' on jatkuva välillä $[-1,1]$. Osoita, että
$$\int_{-1}^{1} x f''(x)\,dx = f'(1) + f'(-1) - f(1) + f(-1).$$
(b) Laske
$$\int_{-1}^{1} x e^x\,dx.$$

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Institutionen för matematik och statistik
Analys II
Kursprov 2, 6.5.2014

1. Undersök om serien $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{k}\right)^k$ konvergerar.

2. Anta att serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar absolut. Visa att serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx)$ konvergerar likformigt i $\mathbb{R}$.

3. Bestäm potensseriens $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^3(x+1)^k}{3^k}$
   (a) konvergensradie,
   (b) centrumpunkten och konvergensintervallet.
   (c) Beräkna $S'(-1)$ och $S^{(2014)}(-1)$, då vi betecknar $S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^3(x+1)^k}{3^k}$ för alla punkter x i konvergensintervallet.

4. Låt oss undersöka funktionen $f(x)=e^{\sin x}$, $x\in\mathbb{R}$.
   (a) Bestäm Taylor polynomet $T_2(x;0)$ för f.
   (b) Undersök om funktionen f har extremvärden i punkterna $n\cdot\frac{\pi}{2}$, där $n\in\mathbb{Z}$. Om den har, ar det fråga om minimum- eller maximumpunkter?

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Analyysi II
Kurssikoe 2, 6.5.2014

1. Tutki, suppeneeko sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{k}\right)^k$.

2. Oletetaan, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee itseisesti. Osoita, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$ suppenee tasaisesti $\mathbb{R}$:ssä.

3. Määritä potenssisarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3(x+1)^k}{3^k}$
   (a) suppenemissäde,
   (b) keskus ja suppenemisväli.
   (c) Laske $S'(-1)$ ja $S^{(2014)}(-1)$, kun merkitään $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3(x+1)^k}{3^k}$ kaikilla suppenemisvälin pisteillä x.

4. Tarkastellaan funktiota $f(x) = e^{\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Määritä funktion f Taylorin polynomi $T_2(x; 0)$.
   (b) Tutki, onko funktiolla f ääriarvoja pisteissä $n \cdot \frac{\pi}{2}$, missä $n \in \mathbb{Z}$. Jos on, niin onko kyseessä minimi- vai maksimikohta?

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Institutionen för matematik och statistik
Analys II
Kursprov 1
27.2.2014

1. Beräkna $\int_0^1 \sqrt{x}\sin(x^{3/2}-1)\,dx$.

2. Låt $f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x, & -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ x+c, & 0 < x \leqslant 2, \end{cases}$$
där $c \in \mathbb{R}$ är en konstant.
   (a) Om $c = \frac{5}{3}$, finns det en punkt $z \in [-2,2]$ för vilken
$$f(z) = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx?$$
   Varför motsäger din observation inte integralkalkylens medelvärdessats?
   (b) Bestäm konstanten $c \in \mathbb{R}$ så att du kan tillämpa integralkalkylens medelvärdessats på funktionen f på intervallet $[-2,2]$. Vilken är den punkt $z \in [-2,2]$ som finns enligt satsen?

3. Undersök ifall den oegentliga integralen $\int_4^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$ konvergerar.

4. Låt $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ vara växande, och låt J_n vara den ekvidistanta indelningen av intervallet $[a,b]$, där alltså $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ för alla $k = 1,2,\ldots,n$.
   (a) Visa att skillnaden mellan översumman och undersumman satisfierar
$$\overline{S}_{J_n}(f) - \underline{S}_{J_n}(f) = \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n}.$$
   (b) Visa på basen av del (a) och Riemanns integrerbarhetsvillkor att f on integrerbar.

Linjär algebra och matrisräkning I
Helsingfors universitet, institutionen för matematik och statistik
Allmän tentamen 11.1.2017

1. Ta reda på hur många lösningar ekvationssystemet har i följande fall. Motivera dina svar.
   (a) Ekvationssystemets motsvarande matris har med elementära radoperationer fåtts i formen
   $$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$
   (b) Ekvationssystemets koefficientmatris kan med elementära radoperationer ändras till
   $$\begin{bmatrix} 7 & -5 & 6 \\ 8 & -1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Spänner vektorerna $\bar{v}_1 = (2,1,-3)$, $\bar{v}_2 = (1,1,1)$ och $\bar{v}_3 = (1,0,-4)$ upp rummet $\mathbb{R}^3$?
   (b) Ge ett exempel på ett tredimensionellt delrum till rummet $\mathbb{R}^4$. Motivera ditt svar.

3. (a) Bestäm koordinaterna för $\bar{v} = (2,5)$ med avseende på basen $((-1,2),(0,3))$.
   (b) Beteckna $\bar{v}_1 = (1,0,3)$, $\bar{v}_2 = (1,1,0)$ och $\bar{v}_3 = (-1,0,a)$, där $a \in \mathbb{R}$. För vilka värden på a är följden $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ fri?

4. Vi betecknar $\bar{w} = (-2,1)$ och $\bar{v} = (3,-4)$.
   (a) Beräkna projektionen $\mathrm{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$. *Minnesuppfriskning:* $\mathrm{proj}(\bar{v})_{\bar{w}} = \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\bar{w}\cdot\bar{w}}\bar{w}$
   (b) Rita en bild av vektorerna $\bar{v}$, $\bar{w}$, $\mathrm{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$ och $\bar{v} - \mathrm{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$. Förklara med egna ord, hur skillnadsvektorn $\bar{v} - \mathrm{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$ hör ihop med definitionen av projektion.

5. (a) Visa att $\bar{v} = (1,-2)$ är en egenvektor till matrisen
   $$A = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}.$$
   Vad är det motsvarande egenvärdet? Motivera ditt svar med hjälp av definitionen för egenvärden.
   (b) Vi betecknar $\bar{w} = (-2,1)$. Det finns en 2×2 -matris A, för vilken det gäller att då man multiplicerar vektorer med den, så projiceras vektorerna i delrummet som spänns upp av $\bar{w}$. Med andra ord gäller $A\bar{x} = \mathrm{proj}_{\bar{w}}(\bar{x})$ för alla $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$. Matrisen A har två egenvärden. Vilka är de? Noggranna motiveringar krävs inte, du kan t.ex. använda en bild som stöd för dina motiveringar.

Linjär algebra och matrisräkning I
Helsingfors universitet, institutionen för matematik och statistik
Kursprov 26.10.2016

I provet får räknare eller tabellbok ej användas. Kom ihåg att motivera alla dina svar.

1. Vi undersöker vektorerna $\bar{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\bar{v}_2 = (0, 2, 0)$ och $\bar{v}_3 = (1, -1, 1)$.
   (a) Är följden $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ fri? Motivera ditt svar med definitionen för vektorers frihet.
   (b) Spänner vektorerna $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ och $\bar{v}_3$ upp rummet $\mathbb{R}^3$? Motivera ditt svar med hjälp av definitionen för uppspänning.
   (c) Beskriv hur delrummet $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ ser ut. Kom ihåg att motivera ditt svar.

2. (a) Matrisen A har egenvektorn $\bar{v} = (3, -1)$. Vilka av följande vektorer kunde vara $A\bar{v}$ och vilka ej? Ifall vektorn kan vara $A\bar{v}$, berätta, vilket egenvärde hör till vektorn $\bar{v}$.
   $$\bar{a} = (2, 4), \qquad \bar{b} = (-1, 1/3), \qquad \bar{c} = (6, -2, 0)$$
   (b) Matrisen B har egenvärdet $1/2$, som hör till egenvektorerna $\bar{w}$ och $\bar{u}$. Visa, att även $-4\bar{w} + 2\bar{u}$ är en egenvektor till vilken egenvärdet $1/2$ hör.

3. (a) Din kompis påstår, att ett ekvationssystem har oändligt många lösningar, ifall det i dens motsvarande trappstegsmatris finns en nollrad. (Det vill säga raden har endast nollor både till höger, samt till vänster om strecket.) Ge ett exempel på en trappstegsmatris, i vilken det finns en nollrad, men dess motsvarande ekvationssystem har
      i. exakt en lösning
      ii. inga lösningar.

   Kom ihåg att motivera ditt svar.
   (b) Vi antar, att A är en kvadratisk matris, för vilken $A^2 - 3A + I = O$ gäller. Visa, att matrisen A är inverterbar, och att dens inversmatris är $3I - A$.

4. (a) Aladdin far med sin matta från sitt palats mot solnedgången. Han styr då sin matta med riktningsvektorn $\bar{w} = (-5, -1, 2)$. Efter att ha åkt en bit, gör Aladdin en rätvinklig sväng och kommer då till skattgrottan. Skattgrottans platsvektor räknat från palatset är $\bar{v} = (-22, 20, 0)$.
      i. Bestäm vektorns $\bar{v}$ projektion på delrummet som vektorn $\bar{w}$ spänner upp.
      ii. Förklara med egna ord och bilder, på vilket sätt projektionen vi räknade i föregående deluppgift och Aladdins flygresa är relaterade.

   Minnesuppfriskning: $\text{proj}(\bar{v})_{\bar{w}} = \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\bar{w}\cdot\bar{w}}\bar{w}$
   (b) Vi vill ta reda på, ifall vektorerna $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ och $\bar{u}_3$ bildar en bas för rummet $\mathbb{R}^3$. Då vi undersöker ifall rummets $\mathbb{R}^3$ vektor $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$ kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ och $\bar{u}_3$, får vi ett ekvationssystem, vars koefficientmatris determinant är -13. Är det fråga om en bas? Förklara noggrant din slutlednings mellansteg.

5. Svara efter provet på ett kort frågeformulär gällande Stack-uppgifterna. Du får 4 provpoäng av att svara. Linken till formuläret skickas till dig per e-post och den hittas även på kurshemsidan.

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kurssikoe 26.10.2016

Kokeessa ei saa käyttää laskinta eikä taulukkokirjaa. Muista perustella kaikki vastauksesi.

1. Tutkitaan vektoreita $\bar{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\bar{v}_2 = (0, 2, 0)$ ja $\bar{v}_3 = (1, -1, 1)$.
   (a) Onko jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ vapaa? Perustele vastauksesi vapauden määritelmän avulla
   (b) Virittävätkö vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ avaruuden $\mathbb{R}^3$? Perustele vastauksesi virittämisen määritelmän avulla.
   (c) Kuvaile, miltä aliavaruus $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ näyttää. Muista perustella vastauksesi.

2. (a) Matriisilla A on ominaisvektori $\bar{v} = (3, -1)$. Mikä seuraavista vektoreista voisi olla $A\bar{v}$ ja mikä ei? Jos vektori voi olla $A\bar{v}$, kerro, mikä silloin on vektoria $\bar{v}$ vastaava ominaisarvo.
   $$\bar{a} = (2,\ 4), \qquad \bar{b} = (-1, 1/3), \qquad \bar{c} = (6, -2, 0)$$
   (b) Matriisilla B on ominaisarvo $1/2$, jota vastaaavat ominaisvektorit $\bar{w}$ ja $\bar{u}$. Osoita, että myös $-4\bar{w} + 2\bar{u}$ on ominaisarvoa $1/2$ vastaava ominaisvektori.

3. (a) Kaverisi väittää, että yhtälöryhmällä on ääretön määrä ratkaisuja, jos sitä vastaavassa porrasmuotoisessa matriisissa on nollarivi. (Toisin sanoen rivillä on nollia sekä viivan oikealla että vasemmalla puolella.) Anna hänelle esimerkki porrasmatriisista, jossa esiintyy nollarivi mutta jota vastaavalla yhtälöryhmällä on
      i. täsmälleen yksi ratkaisu
      ii. ei yhtään ratkaisua.

   Muista perustella vastauksesi.
   (b) Oletetaan, että A on neliömatriisi, jolle pätee $A^2 - 3A + I = O$. Osoita, että matriisi A on kääntyvä ja sen käänteismatriisi on $3I - A$.

4. (a) Aladdin lähtee matollaan palatsistaan kohti laskevaa aurinkoa. Tällöin hän ohjaa mattoaan suuntavektorilla $\bar{w} = (-5, -1, 2)$. Edettyään jonkin matkaa Aladdin tekee suorakulmaisen käännöksen ja päätyy aarreluolalle. Aarreluolan paikkavektori palatsista laskettuna on $\bar{v} = (-22, 20, 0)$.
      i. Määritä vektorin $\bar{v}$ projektio vektorin $\bar{w}$ virittämälle aliavaruudelle.
      ii. Selitä omin sanoin ja kuvin, millä tavoin edellisessä kohdassa laskettu projektio liittyy Aladdinin lentomatkaan.

   Muistin virkistys: $\text{proj}(\bar{v})_{\bar{w}} = \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\bar{w}\cdot\bar{w}}\bar{w}$
   (b) Halutaan selvittää, muodostavatko eräät vektorit $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ ja $\bar{u}_3$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ kannan. Kun tutkitaan, voiko avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoria $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$ kirjoittaa vektoreiden $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ ja $\bar{u}_3$ lineaarikombinaationa, päädytään yhtälöryhmään, jonka kerroinmatriisin determinantti on -13. Onko kyseessä kanta? Selitä huolellisesti päättelysi välivaiheet.

5. Vastaa kokeen jälkeen Stack-tehtäviä koskevaan lyhyeen kyselyyn. Saat kyselyyn vastaamisesta 4 koepistettä. Kyselyn linkki lähetetään sinulle sähköpostitse ja se löytyy myös kurssisivulta.

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

Kurssikoe 4.3.2020

Helsingin yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen osasto

1. (a) Onko olemassa sellaista lineaarikuvausta $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, että $L(1,1,2) = (0,1,1)$, $L(0,1,0) = (1,1,1)$, ja $L(1,2,2) = (5,6,7)$? Perustele vastauksesi.

   (b) Olkoon $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineaarikuvaus, jolle pätee $L(1,0) = (1,2,0)$ ja $L(0,1) = (1,1,1)$. Laske $L(3,4)$.

2. Vektoriavaruuden V osajoukkoa W sanotaan *aliavaruudeksi*, jos seuraavat ehdot pätevät:

   (i) $\bar{w} + \bar{u} \in W$ kaikilla $\bar{w}, \bar{u} \in W$

   (ii) $c\bar{w} \in W$ kaikilla $c \in \mathbb{R}$, $\bar{w} \in W$

   (iii) $\bar{0} \in W$.

   (a) Osoita, että joukko
   $$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$
   on 2×2 -matriiseista koostuvan vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus.

   (b) Onko joukko W vektoriavaruus? Perustele vastauksesi lyhyesti.

3. Avaruudessa $\mathbb{R}^2$ voidaan määritellä sisätulo kaavalla
   $$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2.$$
   Tässä tehtävässä käytetään kyseistä sisätuloa. Tutkitaan aliavaruutta $W = span((-3,1))$.

   (a) Onko vektori $(1,3)$ kohtisuorassa komplementissa $W^\perp$? Entä vektori $(2,12)$?

   (b) Määritä aliavaruus $W^\perp$ ja etsi sille jotkin virittäjät.

   (c) Piirrä kuva, jossa näkyy aliavaruudet W ja $W^\perp$. Miten selität sen, että nämä aliavaruudet eivät kuvassa näytä olevan kohtisuorassa toisiaan vastaan?

Huomaa, että koe jatkuu toisella sivulla!

4. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa? Todista tai anna vastaesimerkki.

   (a) Jokainen lineaarikuvaus $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ on surjektio.

   (b) Jos V on vektoriavaruus ja lineaarikuvauksella $L : V \to V$ on ominaisarvo $\lambda \in \mathbb{R}$ ja sitä vastaavat ominaisvektorit $\bar{v}$ ja $\bar{u}$, niin myös vektori $\bar{v} + \bar{u}$ on ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori.

5. (a) Mitä tarkoittaa, että vektoriavaruudet U ja V ovat isomorfiset? Anna matemaattisesti täsmällinen määritelmä ja kerro lisäksi, mikä on sen taustalla oleva idea.

   (b) Tiedetään, että reaalisten 2×2 -diagonaalimatriisien joukko

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

   on vektoriavaruus. Osoita, että se on isomorfinen avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanssa (vihje: yksi tapa tehdä tämä on etsiä sopiva lineaarikuvaus).

Kurssikoe: Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II, 20.12.2017.
Vastuuopettaja Martina Aaltonen.
Apuvälineet: MAOL, Laskin

Tehtävä 1. Olkoon

$$W = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

a) Osoita, että W on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus.
b) Vektoriavaruuteen $\mathbb{R}^2$ voidaan määritellä sisätulo asettamalla

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2$$

kaikilla $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Kuuluuko vektori $(1, 1)$ aliavaruuden $W \subset \mathbb{R}^2$ kohtisuoraan komplementtiin $W^\perp \subset \mathbb{R}^2$ tämän sisätulon suhteen?

Tehtävä 2. Polynomiavaruuden $\mathcal{P}$ aliavaruudella

$$\mathcal{P}_2 = \{p \in \mathcal{P} \mid p = 0 \text{ tai } \deg(p) \leq 2\}$$

on kanta $\mathcal{T} = (x^2 - x + 1, x - 1, 1)$.

a) Määritä vektoriavaruuden $\mathcal{P}_2$ dimensio.
b) Määritä vektorin $p = x^2 - x + 2$ koordinaattivektori $[p]_\mathcal{T}$ kannan $\mathcal{T}$ suhteen.

Tehtävä 3. Olkoon

$$L \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3).$$

a) Määritä kuvauksen L standardimatriisi.
b) Määritä kuvan $\mathrm{Im}(L) \subset \mathbb{R}^2$ dimensio. Määritä edelleen (esimerkiksi dimensiolausetta hyödyntäen) ytimen $\mathrm{Ker}(L) \subset \mathbb{R}^3$ dimensio.

Tehtävä 4. Olkoon

$$L \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x_1, x_2) = (x_2, x_1),$$

tason $\mathbb{R}^2$ peilaus suoran $span((1, 1))$ suhteen.
a) Osoita, että lineaarikuvauksella L on ominaisarvot $\lambda = 1$ ja $\lambda = -1$.
b) Onko lineaarikuvaus L injektio? Perustele.

Linjäralgebra och matrisräkning II
Helsingfors universitet, institutionen för matematik och statistik
Kursprov 21.12.2016

Provtiden är 2,5 timmar. I provet får räknare eller tabellbok ej användas.

1. Utred i följande fall, ifall det finns en linjär avbildning L, som uppfyller följande krav. Ifall avbildningen finns, ge formeln som definierar avbildningen.
   (a) Vi antar, att $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ och $L(0,1,-1) = (-1,-1)$, $L(-2,2,0) = (-3,2)$ samt $L(-2,0,2) = (0,1)$.
   (b) Vi antar, att $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ och L sträcker ut vektorn $(-1,1)$ till fyrdubbel längd samt roterar vektorn $(1,0)$ medsols 90 grader.

2. (a) Är mängden $W = \{a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2 \mid abc = 0\}$ ett delrum till rummet $\mathcal{P}_2$?
   (b) Nedan har bevisats, att
$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 2a & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$
är ett delrum till rummet $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Bevisets logiska struktur innehåller dock brister och är heller inte skrivet med bra matematisk stil. Skriv om beviset och rätta bristerna. Använd i din lösning fullständiga svenska meningar.
Bevis:
$$\begin{bmatrix} 2a & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & d \\ -d & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+2c & b+d \\ -b+(-d) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(a+c) & b+d \\ -(b+d) & 0 \end{bmatrix}$$
$$r\begin{bmatrix} 2a & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(2a) & rb \\ r(-b) & r\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(ra) & rb \\ -(rb) & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 2\cdot 0 & 0 \\ -0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. I denna uppgift undersöker vi vektorrummets $\mathbb{R}^2$ delrum $W = \operatorname{span}((-1,2,-1),(1,1,1))$ samt vektorn $\bar{v} = (2,-5,1)$. Innerprodukten är definierad som vanlig punktprodukt.
   (a) Bestäm $\operatorname{proj}_W(\bar{v})$. (Minnesuppfriskning: $\operatorname{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}) = \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\bar{w}\cdot\bar{w}}\bar{w}$.)
   (b) Din kompis har studerat linjäralgebra, men har inte hört talas om det ortogonala komplementet. Förklara till kompisen med ord, vad ortogonalt komplement betyder. Du får, om du vill, även rita konceptbilder.
   (c) Skriv vektorn $\bar{v}$ som en summa av två vektorer, varav den ena tillhör delrummet W och den andra det ortogonala komplementet $W^{\perp}$.

4. (a) Den linjära avbildningen $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ speglar planets vektorer över linjen $\operatorname{span}((-7,5))$. Sök, utan att bestämma matrisen, den linjära avbilndingens L egenvärden. Förklara, varför talen du hittade är avbildningens egenvärden. Motiveringarna behöver inte vara noggranna, utan du kan referera till till exempel en bild.
   (b) Låt V vara ett vektorrum, med basen $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$. Vi antar, att $L\colon V \to W$ är en linjär avbildning. Visa, att om $(L(\bar{v}_1), \ldots, L(\bar{v}_n))$ är en bas, så är L en isomorfism.

Kom ihåg, att du får 4 provpoäng av att svara på How you learn -frågeformuläret. Linken till formuläret har skickats till dig per e-post. Svara senast 23.12.

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kurssikoe 21.12.2016

Koeaika on 2,5 tuntia. Kokeessa ei saa käyttää laskinta eikä taulukkokirjaa.

1. Selvitä seuraavissa tapauksissa, onko olemassa lineaarikuvausta L, joka toteuttaa annetut ehdot. Jos kuvaus on olemassa, anna kuvauksen määrittelevä kaava.
   (a) Oletetaan, että $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ja $L(0,1,-1) = (-1,-1)$, $L(-2,2,0) = (-3,2)$ sekä $L(-2,0,2) = (0,1)$.
   (b) Oletetaan, että $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ja L venyttää vektorin $(-1,1)$ nelinkertaiseksi sekä kiertää vektoria $(1,0)$ myötäpäivään 90 astetta.

2. (a) Onko joukko $W = \{a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2 \mid abc = 0\}$ avaruuden $\mathcal{P}_2$ aliavaruus?
   (b) Ohessa on osoitettu, että
   $$W = \left\{ \begin{bmatrix} 2a & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$
   on avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus. Todistuksen loogisessa rakenteessa on kuitenkin puutteita, eikä se ole hyvällä matemaattisella tyylillä kirjoitettu. Kirjoita todistus uudelleen korjaten puutteet. Käytä ratkaisussasi kokonaisia suomen kielen virkkeitä.
   Todistus:
   $$\begin{bmatrix} 2a & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & d \\ -d & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+2c & b+d \\ -b+(-d) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(a+c) & b+d \\ -(b+d) & 0 \end{bmatrix}$$
   $$r\begin{bmatrix} 2a & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(2a) & rb \\ r(-b) & r\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(ra) & rb \\ -(rb) & 0 \end{bmatrix}$$
   $$\begin{bmatrix} 2\cdot 0 & 0 \\ -0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Tässä tehtävässä tutkitaan vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruutta $W = \operatorname{span}((-1,2,-1),(1,1,1))$ sekä vektoria $\bar{v} = (2,-5,1)$. Sisätulona on tavallinen pistetulo.
   (a) Määritä $\operatorname{proj}_W(\bar{v})$. (Muistin virkistys: $\operatorname{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}) = \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\bar{w}\cdot\bar{w}}\bar{w}$.)
   (b) Kaverisi on opiskellut lineaarialgebraa, mutta ei ole kuullut kohtisuorasta komplementista. Selitä hänelle sanallisesti, mitä kohtisuora komplementti tarkoittaa. Voit halutessasi piirtää myös havainnekuvia.
   (c) Kirjoita vektori $\bar{v}$ summana kahdesta vektorista, joista toinen on aliavaruuden W ja toinen kohtisuoran komplementin $W^\perp$ alkio.

4. (a) Lineaarikuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ peilaa tason vektorit suoran $\operatorname{span}((-7,5))$ suhteen. Etsi matriisia määrittämättä lineaarikuvauksen L ominaisarvot. Selitä, miksi löytämäsi luvut ovat kuvauksen ominaisarvoja. Perusteluiden ei tarvitse olla tarkat, vaan voit nojautua niissä esimerkiksi piirrokseen.
   (b) Olkoon V vektoriavaruus, jolla on kanta $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$. Oletetaan, että $L\colon V \to W$ on lineaarikuvaus. Osoita, että jos $(L(\bar{v}_1), \ldots, L(\bar{v}_n))$ on kanta, niin L on isomorfismi.
   avaruuden W

Muista, että saat 4 koepistettä HowULearn-kyselyyn vastaamisesta. Kyselyn linkki on lähetetty sinulle sähköpostitse, ja pääset kirjautumaan kyselyyn myös osoitteessa learn.helsinki.fi. Vastaa kyselyyn viimeistään 23.12.

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kurssikoe 16.12.2015

Kokeessa ei saa käyttää laskinta eikä taulukkokirjaa. Muista perustella kaikki vastauksesi huolellisesti.

1. Tutkitaan vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 3}$ aliavaruutta $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ sekä kuvausta

$$L\colon \mathbb{R}^2 \to W, \quad L(a_1, a_2) = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Osoita, että L on lineaarikuvaus.
   (b) Määritä ydin $\operatorname{Ker} L$ ja kuva $\operatorname{Im} L$.
   (c) Ovatko vektoriavaruudet $\mathbb{R}^2$ ja W isomorfiset?
   (d) Kaverisi tietää, mitä vektoriavaruuden ovat, mutta hän ei ole kuullut lineaarikuvauksista. Selitä kaverillesi, mitä c-kohdan tulos tarkoittaa ilman, että mainitset lineaarikuvauksia.

2. (a) Keksi matriisavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus, johon matriisi $\begin{bmatrix} 1 & 15 \\ -10 & 42 \end{bmatrix}$ kuuluu, mutta matriisi $\begin{bmatrix} 4 & 1/2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ei kuulu.
   (b) Tässä tehtävässä käsitellään funktioista koostuvan vektoriavaruuden $\mathcal{F}$ aliavaruutta $W = \operatorname{span}(f, g, h)$, missä

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x - 4,$$
$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2 \quad \text{ja}$$
$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \sin(x).$$

   Aliavaruudella W on kanta $\mathcal{B} = (f, g, h)$. Mikä on vektorin

$$k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad k(x) = 6x - 3\sin(x) - 8$$

   koordinaattivektori kannan $\mathcal{B}$ suhteen?

3. (a) Oletetaan, että lineaarikuvaukselle $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ pätee $T(0,1,-1,1) = (-1,-1,0)$ ja $T(-2,2,0,1) = (-3,2,1)$. Määritä $T(-2,0,2,-1)$.
   (b) Tutkitaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruutta $W = \operatorname{span}((1,1,1), (-1,2,-1))$.
      i. Määritä $\operatorname{proj}_W((1,0,0))$. (Muistin virkistys: $\operatorname{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}) = \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\bar{w}\cdot\bar{w}}\bar{w}$.)
      ii. Projektiokuvaus $p\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $p(\bar{x}) = \operatorname{proj}_W(\bar{x})$ on lineaarinen. Määritä kuvauksen p matriisi.

4. (a) Tutkitaan lineaarikuvausta

$$L\colon \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2, \quad L(a + bx + cx^2) = a + b + c + (a + b + c)x + (a + b + c)x^2.$$

   Kuvauksella L on ominaisarvot 0 ja 3. Keksi jotkin näitä ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit. Perustele vastauksesi ominaisarvon määritelmän avulla.
   (b) Oletetaan, että V on sisätuloavaruus ja $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \in V$. Oletetaan lisäksi, että vektori $\bar{w} \in V$ on kohtisuorassa vektoreita $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ vastaan. Osoita, että $\bar{w}$ on aliavaruuden $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ kohtisuorassa komplementissa.

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto
Erilliskuulustelu
12.3.2015

1. (a) Oletetaan, että $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ on lineaarikuvaus, jolle pätee $L(1,0,0) = (1,0,0,2)$ ja $L(0,0,1) = (1,0,4,-2)$. Määritä $L(-2,0,2)$.
   (b) Tutkitaan kuvausta $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jolle pätee
   $$\begin{aligned} g(1,0) &= (1,1), \\ g(0,1) &= (1,-1), \\ g(1,1) &= (2,0), \\ g(2,2) &= (4,0). \end{aligned}$$
   Onko kuvaus g välttämättä lineaarinen?

2. (a) Merkitään
   $$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
   Anna esimerkki avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruudesta, johon matriisi A kuuluu ja matriisi B ei kuulu. Perustele vastauksesi.
   (b) Onko polynomiavaruuden $\mathcal{P}$ jono $(x,\ 2x+1,\ x^3)$ vapaa?

3. Osoita aliavaruuden määritelmän perusteella, että joukko
   $$W = \{(2a, b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$
   on avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus.

4. (a) Kaverisi on opiskellut lineaarialgebraa, mutta ei ole kuullut ominaisarvon tai ominaisvektorin käsitteestä. Selitä hänelle lyhyesti omin sanoin, mitä ovat lineaarikuvauksen ominaisarvot ja ominaisvektorit.
   (b) Merkitään $\bar{w} = (-2,3)$. Tutkitaan projektiokuvausta
   $$P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad P(\bar{x}) = \frac{\bar{x}\cdot\bar{w}}{\bar{w}\cdot\bar{w}}\bar{w}.$$
   Osoita lineaarikuvauksen ominaisarvon määritelmän avulla, että kuvauksella on ominaisarvot 1 ja 0.

5. (a) Määritä lineaarikuvauksen
   $$L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad L(x_1,x_2) = (4x_2,\ 5x_1 + x_2,\ x_1)$$
   standardimatriisi.
   (b) Oletetaan, että $T\colon V \to W$ on lineaarikuvaus, ja $\dim(V) > \dim(W)$. Voiko T olla injektio?

Linjär algebra och matrisräkning II
Helsingfors universitet, institutionen för matematik och statistik
Kursprov 12.12.2012

I provet får man använda miniräknare men inte tabellbok.

1. *(8 poäng)*

   (a) Antag att $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är en linjär avbildning, för vilken $L(1,0) = (1,5)$ och $L(0,1) = (4,0)$. Bestäm $L(4,2)$.

   (b) Antag att $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ är en linjär avbildning, för vilken $T(1,0) = (1,5,3)$ och $T(0,1) = (4,0,1)$. Bestäm matrisen för T.

2. *(6 poäng)*

   (a) Bestäm egenvärdena och de motsvarande egenrummen till matrisen
   $$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

   (b) En egenvektor till matrisen A är $(0,-2)$. Förklara kort vad det betyder.

3. *(10 poäng)* I polynomrummet $\mathcal{P}_1$ kan man definiera en inre produkt med följande formel:
   $$\langle ax+b, cx+d\rangle = 2ac + 3bd \quad \text{för varje } ax+b, cx+d \in \mathcal{P}_1.$$

   (a) Bestäm normen $\|3x+1\|$.

   (b) Vilka av följande polynom hör till det ortogonala komplementet $W^{\perp}$ till delrummet $W = \{ax + a \mid a \in \mathbb{R}\}$?

   a) $x - 1$ b) $3x - 2$

4. *(14 poäng)*

   (a) Vilka är delrummen av vektorrummet $\mathbb{R}^3$? Du kan beskriva delrummen med egna ord och behöver ej motivera dina svar.

   (b) Låt $W = \{(r-2s,\ 4s,\ 3r-s) \mid r,s \in \mathbb{R}\}$. Visa utgående från definitionen av ett delrum att W är ett delrum av vektorrummet $\mathbb{R}^3$.

   (c) Sök vektorer som spänner upp det ovannämnda delrummet W.

   (d) Vad är dimensionen av delrummet W? Kom ihåg att motivera ditt svar.

5. *(10 poäng)* Låt $L\colon V \to W$ vara en bijektiv linjär avbildning. Antag att rummet V har basen $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$. Visa att följden $(L(\bar{v}_1), \ldots, L(\bar{v}_k))$ utgör en bas för rummet W.

Ge kursrespons! Din respons är viktig för oss eftersom vi vill utveckla undervisningen. Du får via WebOodi ett email med en länk varifrån du kommer åt att ge responsen. Genom att ge respons får man extra poäng motsvarande tre räkneövningsuppifter utan stjärna.

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kurssikoe 12.12.2012

Kokeessa saa käyttää laskinta mutta ei taulukkokirjaa.

1. *(8 pistettä)*

   (a) Oletetaan, että $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on lineaarikuvaus, jolle pätee $L(1,0) = (1,5)$ ja $L(0,1) = (4,0)$. Määritä $L(4,2)$.

   (b) Oletetaan, että $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ on lineaarikuvaus, jolle pätee $T(1,0) = (1,5,3)$ ja $T(1,1) = (4,0,1)$. Etsi matriisi, jonka määräämä lineaarikuvaus T on.

2. *(6 pistettä)*

   (a) Määritä matriisin
   $$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$
   ominaisarvot.

   (b) Eräs matriisin A ominaisvektori on $(0,-2)$. Selitä lyhyesti, mitä se tarkoittaa.

3. *(10 pistettä)* Polynomiavaruudessa $\mathcal{P}_1$ voidaan määritellä sisätulo seuraavalla kaavalla:
   $$\langle ax+b, cx+d\rangle = 2ac + 3bd \quad \text{kaikilla } ax+b, cx+d \in \mathcal{P}_1.$$

   (a) Määritä normi $\|3x+1\|$.

   (b) Mitkä seuraavista polynomeista kuuluvat aliavaruuden $W = \{ax + a \mid a \in \mathbb{R}\}$ kohtisuoraan komplementtiin $W^\perp$?

   a) $x-1$ b) $3x-2$

4. *(14 pistettä)*

   (a) Mitkä ovat vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruudet? Voit kuvailla aliavaruuksia omin sanoin, eikä vastauksia tarvitse perustella.

   (b) Olkoon $W = \{(r-2s,\ 4s,\ 3r-s) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$. Osoita aliavaruuden määritelmän avulla, että W on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus.

   (c) Etsi edellisen kohdan aliavaruudelle W jotkin virittäjävektorit.

   (d) Mikä on aliavaruuden W dimensio? Muista perustella vastauksesi.

5. *(10 pistettä)* Olkoon $L\colon V \to W$ bijektiivinen lineaarikuvaus. Oletetaan, että avaruudella V on kanta $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$. Osoita, että jono $(L(\bar{v}_1), \ldots, L(\bar{v}_k))$ on avaruuden W kanta.

Anna kurssipalautetta! Palautteesi on meille tärkeää, sillä haluamme kehittää opetusta. Saat WebOodin kautta sähköpostiisi linkin, josta pääset täyttämään palautteen. Palautteen antamisesta myönnetään lisäpisteitä saman verran kuin kolmesta tähdettömästä laskuharjoitustehtävästä.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Avdelningen för matematik och statistik
MAT12003 Sannolikhetskalkyl I
Kursprov 2 h 30 min
8.3.2018 kl. 12:00–14:30

I kursprovet får man använda en räkneapparat, men inga andra hjälpmedel (det är exempelvis inte tillåtet att använda en tabellsamling).

1. Man väljer slumpmässigt ett tal från talen $1, 2, 3, 4, 5$. Låt det valda talet vara n. Därefter väljer man slumpmässigt ett tal från talen $1, \ldots, n$.
   (a) Vilken är sannolikheten att det senare valda talet är 2?
   (b) Vilken är den betingade sannolikheten att det först valda talet var 2, då det senare valda talet är 2?

2. Man antar att A, B och C är oberoende händelser i sannolikhetsrummet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ och att deras sannolikheter är alla positiva (speciellt alltså $\neq 0$).
   (a) Visa att $B \cap C \neq \emptyset$.
   (b) Visa att händelserna A och $B \cap C$ är oberoende.

3. Förpackningsmaskinen i en spikfabrik fyller en låda med spikar en i gången. Spikarnas vikter X_i är oberoende slumpvariabler, för vilka $EX_i = 25$ och $DX_i = 1$, där måttenheten är gram (g). Påfyllningen av spikar i en låda upphör genast då spikarnas totala vikt överskrider 10 kg. Beräkna med hjälp av normalapproximationen sannolikheten att det finns högst 398 spikar i en påfylld låda.

4. Låt X_1 och X_2 vara oberoende slumpvariabler, för vilka $X_i \sim \mathrm{Geom}(p)$, $i = 1, 2$.
   (a) Härled slumpvariabelns $Y = \min\{X_1, X_2\}$ fördelningsfunktion $Y \sim \mathrm{Geom}(1 - q^2)$, där $q = 1 - p$.
   (b) Bestäm EY och D^2Y $(= \mathrm{Var}(Y))$.
   Påminnelse: Om $X \sim \mathrm{Geom}(p)$, så gäller för dess fördelningsfunktion att $F_X(k) = 1 - q^{k+1}$ för alla $k = 0, 1, 2, \ldots$, där $q = 1 - p$.

På omstående sida av uppgiftspappret finns en tabell med värden av fördelningsfunktionen för standardnormalfördelningen samt en lista över de viktigaste fördelningarnas frekvens- och täthetsfunktioner samt väntevärdet och variansen. ↺

Fördelningsfunktionens värden för standardnormalfördelningen Φ; $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500000	0.503989	0.507978	0,511966	0,515953	0,519938	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563560	0,567495	0,571424	0,575345
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092
0,3	0,617911	0.621720	0,625616	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933
0,5	0,691462	0,694974	0.698468	0,702944	0,705402	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802338	0,805106	0,807850	0,810570	0,813267
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977
1,2	0,884930	0.886861	0.888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475
1,3	0,903200	0.904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914656	0,916207	0,917736
1,4	0,919243	0.920730	0,922196	0,923642	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931889
1,5	0,933193	0.934478	0,935744	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950528	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486
1,7	0,955434	0.956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976704
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987454	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990862	0,991106	0,991344	0,991576
2,4	0,991802	0.992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074
2,9	0,998134	0.998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
3,0	0,998650	0,999032	0,999313	0,999517	0,999663	0,999767	0,999841	0,999892	0,999928	0,999952

Fördelningars frekvens- och täthetsfunktioner samt väntevärdet och variansen

$$X \sim \text{Bernoulli}(p) \implies P(X=k) = p^k(1-p)^{1-k},\ k = 0, 1;$$
$$EX = p \text{ och } D^2X = p(1-p).$$

$$X \sim \text{Bin}(n,p) \implies P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, \ldots, n;$$
$$EX = np \text{ och } D^2X = np(1-p).$$

$$X \sim \text{Hyperg}(N,K,n) \implies P(X=k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}},\ k = 0, 1, \ldots, n;$$
$$EX = n\frac{K}{N} \text{ och } D^2X = n\frac{K}{N}\frac{N-K}{N}\frac{N-n}{N-1}.$$

$$X \sim \text{Geom}(p) \implies P(X=k) = p(1-p)^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots;$$
$$EX = \frac{1-p}{p} \text{ och } D^2X = \frac{1-p}{p^2}.$$

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda) \implies P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k = 0, 1, 2, \ldots;\ EX = \lambda \text{ och } D^2X = \lambda.$$

$$X \sim \text{Tas}(a,b) \implies f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a,b), \\ 0, & \text{annars;} \end{cases} \quad EX = \frac{a+b}{2} \text{ och } D^2X = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$X \sim \text{Exp}(\lambda) \implies f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{annars;} \end{cases} \quad EX = \frac{1}{\lambda} \text{ och } D^2X = \frac{1}{\lambda^2}.$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \implies \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2},\ x \in \mathbb{R};\ EX = \mu \text{ och } D^2X = \sigma^2.$$

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen osasto
MAT12003 Todennäköisyyslaskenta I
Kurssikoe 2 h 30 min
8.3.2018 klo 12:00–14:30

Kokeessa saa käyttää laskinta, mutta ei muita apuvälineitä (esimerkiksi taulukkokirjan käyttö on kielletty).

1. Luvuista $1, 2, 3, 4, 5$ valitaan umpimähkään yksi. Olkoon valittu luku n. Tämän jälkeen luvuista $1, \dots, n$ valitaan umpimähkään yksi.
   (a) Mikä on todennäköisyys, että jälkimmäisenä valittu luku on 2?
   (b) Mikä on ehdollinen todennäköisyys, että ensin valittu luku oli 2, kun jälkimmäisenä valittu luku on 2?

2. Oletetaan, että todennäköisyysavaruuden $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tapahtumat A, B ja C ovat riippumattomia ja niiden kaikkien todennäköisyys on positiivinen (erityisesti siis $\neq 0$).
   (a) Osoita, että $B \cap C \neq \emptyset$.
   (b) Osoita, että tapahtumat A ja $B \cap C$ ovat riippumattomia.

3. Naulatehtaan pakkauskone täyttää laatikon yksitellen nauloilla. Naulojen painot X_i ovat riippumattomia satunnaismuuttujia, joille $EX_i = 25$ ja $DX_i = 1$, missä yksikkönä on gramma (g). Heti kun naulojen yhteispaino ylittää 10 kg, laatikon täyttö lopetetaan. Laske normaaliapproksimaation avulla todennäköisyys, että täytetyssä laatikossa on korkeintaan 398 naulaa.

4. Olkoot X_1 ja X_2 riippumattomia satunnaismuuttujia, joille $X_i \sim \text{Geom}(p)$, $i = 1, 2$.
   (a) Johda satunnaismuuttujan $Y = \min\{X_1, X_2\}$ jakauma $Y \sim \text{Geom}(1 - q^2)$, missä $q = 1 - p$.
   (b) Määritä EY ja D^2Y $(= \text{Var}(Y))$.
   Muistutus: Jos $X \sim \text{Geom}(p)$, niin sen kertymäfunktiolle on voimassa $F_X(k) = 1 - q^{k+1}$ kaikilla $k = 0, 1, 2, \dots$, missä $q = 1 - p$.

Tehtäväpaperin kääntöpuolella on taulukko standardinormaalijakauman kertymäfunktion arvoista sekä lista tärkeimpien jakaumien pistetodennäköisyys- ja tiheysfunktioista sekä odotusarvoista ja variansseista. ↻

Standardinormaalijakauman kertymäfunktion Φ arvoja; $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519938	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563560	0,567495	0,571424	0,575345
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092
0,3	0,617911	0,621720	0,625616	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,702944	0,705402	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802338	0,805106	0,807850	0,810570	0,813267
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914656	0,916207	0,917736
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923642	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931889
1,5	0,933193	0,934478	0,935744	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950528	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486
1,7	0,955434	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976704
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987454	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990862	0,991106	0,991344	0,991576
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
3,0	0,998650	0,999032	0,999313	0,999517	0,999663	0,999767	0,999841	0,999892	0,999928	0,999952

Jakaumien pistetodennäköisyys- ja tiheysfunktioita sekä odotusarvoja ja variansseja

$$X \sim \text{Bernoulli}(p) \implies P(X = k) = p^k(1-p)^{1-k},\ k = 0, 1;$$
$$EX = p \text{ ja } D^2X = p(1-p).$$

$$X \sim \text{Bin}(n, p) \implies P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, \ldots, n;$$
$$EX = np \text{ ja } D^2X = np(1-p).$$

$$X \sim \text{Hyperg}(N, K, n) \implies P(X = k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}},\ k = 0, 1, \ldots, n;$$
$$EX = n\frac{K}{N} \text{ ja } D^2X = n\frac{K}{N}\frac{N-K}{N}\frac{N-n}{N-1}.$$

$$X \sim \text{Geom}(p) \implies P(X = k) = p(1-p)^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots;$$
$$EX = \frac{1-p}{p} \text{ ja } D^2X = \frac{1-p}{p^2}.$$

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda) \implies P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k = 0, 1, 2, \ldots;\ EX = \lambda \text{ ja } D^2X = \lambda.$$

$$X \sim \text{Tas}(a, b) \implies f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b), \\ 0, & \text{muulloin}; \end{cases} \quad EX = \frac{a+b}{2} \text{ ja } D^2X = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$X \sim \text{Exp}(\lambda) \implies f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{muulloin}; \end{cases} \quad EX = \frac{1}{\lambda} \text{ ja } D^2X = \frac{1}{\lambda^2}.$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \implies \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2},\ x \in \mathbb{R};\ EX = \mu \text{ ja } D^2X = \sigma^2.$$

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Institutionen för matematik och statistik
Sannolikhetskalkyl I
Kursprov 2 h 30 min
10.3.2017

1. Ett batteri av typ A fungerar med sannolikheten 0,7, ett batteri av typ B fungerar med sannolikheten 0,9 och ett batteri av typ C fungerar med sannolikheten 0,4. Ett batteri väljs på måfå från en korg, där det finns åtta batterier av typ A, fyra batterier av typ B och sex batterier av typ C.
   (a) Vilken är sannolikheten att det utvalda batteriet fungerar?
   (b) Det utvalda batteriet fungerar inte. Vilken är sannolikheten att man hade valt ett batteri av typ A?
   Ange svaren som exakta bråktal.

2. Den tid som det går till att reparera en maskin är en exponentialfördelad stokastisk variabel med parametern $\lambda = 1/2$ (med enheten timmar).
   (a) Vilken är sannolikheten att det räcker över 2 timmar att korrigera maskinen?
   (b) Vilken är den betingade sannolikheten att det räcker över 10 timmar att korrigera maskinen, då man vet att det räcker över 9 timmar?

3. Matti singlar ett osymmetriskt mynt, där sannolikheten att få en krona är p.
   (a) Hur många gånger singlar Matti myntet, då väntevärdet för antalet kronor är 10 och variansen är 6? Vilken är i detta fall sannolikheten p att få en krona?
   (b) Uppskatta sannolikheten att Matti vid singlingarna erhåller fler än 5 kronor men färre än 15 kronor. Använd normalapproximation.

4. Låt A och B vara händelser i sannolikhetsrummet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, vars sannolikheter inte är 0 eller 1. Visa att om $P(A \mid B) = 1$, så är $P(B^c \mid A^c) = 1$.

På motstående sida finns en tabell över värden av den kumulativa fördelningsfunktionen till en standardnormalfördelning samt en lista över väntevärdet och variansen för fördelningar. ↻

Värden av kumulativa fördelningsfunktionen Φ till standardnormalfördelningen;

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519938	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563560	0,567495	0,571424	0,575345
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092
0,3	0,617911	0,621720	0,625616	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,702944	0,705402	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802338	0,805106	0,807850	0,810570	0,813267
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914656	0,916207	0,917736
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923642	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931889
1,5	0,933193	0,934478	0,935744	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950528	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486
1,7	0,955434	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976704
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987454	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990862	0,991106	0,991344	0,991576
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
3,0	0,998650	0,999032	0,999313	0,999517	0,999663	0,999767	0,999841	0,999892	0,999928	0,999952

Väntevärdet och variansen av fördelningar.

$$X \sim \text{Bin}(n, p) \implies EX = np \text{ och } D^2X = np(1-p)$$

$$X \sim \text{Hyperg}(N, K, n) \implies EX = n\frac{K}{N} \text{ och } D^2X = n\frac{K}{N}\frac{N-K}{N}\frac{N-n}{N-1}$$

$$X \sim \text{Geom}(p) \implies EX = \frac{1-p}{p} \text{ och } D^2X = \frac{1-p}{p^2}$$

$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda) \implies EX = \lambda \text{ och } D^2X = \lambda$$

$$X \sim \text{Tas}(a, b) \implies EX = \frac{a+b}{2} \text{ och } D^2X = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$\lambda e^{-\lambda x}$

$$X \sim \text{Exp}(\lambda) \implies EX = \frac{1}{\lambda} \text{ och } D^2X = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \implies EX = \mu \text{ och } D^2X = \sigma^2$$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Introduktion till sannolikhetskalkyl (svenskspråkiga kursen)
Kursprovet 9.3.2015

Påminnelse: en tvåsidig minneslapp med storlek A4 får medtas till provtillfället

1. En tärning kastas 5 gånger. Beräkna sannolikheten att ögontalen 1 och 2 båda uppträder åtminstone en gång. *Tips:* skriv om $P(A \cap B)$ med hjälp av $P(A^c)$, $P(B^c)$ och $P(A^c \cap B^c)$ för lämpliga händelser A och B. 211/243 0,87

2. I 3 boxar finns följande antal bollar: den första boxen innehåller 2 vita bollar och 2 svarta bollar, den andra boxen innehåller 1 vit boll och 3 röda bollar och den tredje boxen innehåller 2 röda bollar och tre svarta bollar. Man väljer först slumpmässigt en box och drar därefter 2 bollar på måfå utan återläggning från denna box.

(i) Beräkna sannolikheten att båda bollarna är röda. 0,6

(ii) Om båda bollarna är röda, beräkna den betingade sannolikheten att man har valt den andra boxen i första skedet. 0,28 5/18

3. Anta att X och Y är stokastiska variabler definierade på ett utfallsrum Ω, för vilka $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$, samt X och Y är oberoende stokastiska variabler. Definiera $Z(\omega) = \max\{X(\omega), Y(\omega)\}$ då $\omega \in \Omega$.

(i) Bestäm fördelningsfunktionen F_Z till Z.

(ii) Beräkna sannolikheten $P(0 < Z < 1)$. 0,4579

Påminnelse: $Z(\omega) \leq t$ om och endast om $X(\omega) \leq t$ och $Y(\omega) \leq t$.

4. Ett symmetriskt mynt singlas 60 gånger. Låt X vara antalet kronor i singlingarna.

(i) Ange den exakta formeln för sannolikheten $P(20 \leq X \leq 40)$ att erhålla från 20 till 40 kronor.

(ii) Använd normalapproximation till att uppskatta ovanstående sannolikhet. (Svaret kan innehålla lämpliga värden av fördelningsfunktionen Φ till en standardnormalfördelad stokastisk variabel.) 0,99012

På motstående sida finns en tabell över värden av fördelningsfunktionen $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{t^2/2} dt$ till en standardnormalfördelad stokastisk variabel.

Taulukko 1. Standardinormaalijakauman kertymäfunktion Φ arvoja, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.500000	.503989	.507978	.511966	.515953	.519938	.523922	.527903	.531881	.535856
0.1	.539828	.543795	.547758	.551717	.555670	.559618	.563560	.567495	.571424	.575345
0.2	.579260	.583166	.587064	.590954	.594835	.598706	.602568	.606420	.610261	.614092
0.3	.617911	.621720	.625616	.629300	.633072	.636831	.640576	.644309	.648027	.651732
0.4	.655422	.659097	.662757	.666402	.670031	.673645	.677242	.680822	.684386	.687933
0.5	.691462	.694974	.698468	.702944	.705402	.708840	.712260	.715661	.719043	.722405
0.6	.725747	.729069	.732371	.735653	.738914	.742154	.745373	.748571	.751748	.754903
0.7	.758036	.761148	.764238	.767305	.770350	.773373	.776373	.779350	.782305	.785236
0.8	.788145	.791030	.793892	.796731	.799546	.802338	.805106	.807850	.810570	.813267
0.9	.815940	.818589	.821214	.823814	.826391	.828944	.831472	.833977	.836457	.838913
1.0	.841345	.843752	.846136	.848495	.850830	.853141	.855428	.857690	.859929	.862143
1.1	.864334	.866500	.868643	.870762	.872857	.874928	.876976	.879000	.881000	.882977
1.2	.884930	.886861	.888768	.890651	.892512	.894350	.896165	.897958	.899727	.901475
1.3	.903200	.904902	.906582	.908241	.909877	.911492	.913085	.914656	.916207	.917736
1.4	.919243	.920730	.922196	.923642	.925066	.926471	.927855	.929219	.930563	.931889
1.5	.933193	.934478	.935744	.936992	.938220	.939429	.940620	.941792	.942947	.944083
1.6	.945201	.946301	.947384	.948449	.949497	.950528	.951543	.952540	.953521	.954486
1.7	.955434	.956367	.957284	.958185	.959070	.959941	.960796	.961636	.962462	.963273
1.8	.964070	.964852	.965620	.966375	.967116	.967843	.968557	.969258	.969946	.970621
1.9	.971283	.971933	.972571	.973197	.973810	.974412	.975002	.975581	.976148	.976704
2.0	.977250	.977784	.978308	.978822	.979325	.979818	.980301	.980774	.981237	.981691
2.1	.982136	.982571	.982997	.983414	.983823	.984222	.984614	.984997	.985371	.985738
2.2	.986097	.986447	.986791	.987126	.987454	.987776	.988089	.988396	.988696	.988989
2.3	.989276	.989556	.989830	.990097	.990358	.990613	.990862	.991106	.991344	.991576
2.4	.991802	.992024	.992240	.992451	.992656	.992857	.993053	.993244	.993431	.993613
2.5	.993790	.993963	.994132	.994297	.994457	.994614	.994766	.994915	.995060	.995201
2.6	.995339	.995473	.995604	.995731	.995855	.995975	.996093	.996207	.996319	.996427
2.7	.996533	.996636	.996736	.996833	.996928	.997020	.997110	.997197	.997282	.997365
2.8	.997445	.997523	.997599	.997673	.997744	.997814	.997882	.997948	.998012	.998074
2.9	.998134	.998193	.998250	.998305	.998359	.998411	.998462	.998511	.998559	.998605
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
3.0	.998650	.999032	.999313	.999517	.999663	.999767	.999841	.999892	.999928	.999952

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Introduktion till sannolikhetskalkyl (svenskspråkiga kursen)
Kursprovet 9.3.2015

Påminnelse: en tvåsidig minneslapp med storlek A4 får medtas till provtillfället

1. En tärning kastas 5 gånger. Beräkna sannolikheten att ögontalen 1 och 2 båda uppträder åtminstone en gång. *Tips:* skriv om $P(A \cap B)$ med hjälp av $P(A^c)$, $P(B^c)$ och $P(A^c \cap B^c)$ för lämpliga händelser A och B.

2. I 3 boxar finns följande antal bollar: den första boxen innehåller 2 vita bollar och 2 svarta bollar, den andra boxen innehåller 1 vit boll och 3 röda bollar och den tredje boxen innehåller 2 röda bollar och tre svarta bollar. Man väljer först slumpmässigt en box och drar därefter 2 bollar på måfå utan återläggning från denna box.

(i) Beräkna sannolikheten att båda bollarna är röda.

(ii) Om båda bollarna är röda, beräkna den betingade sannolikheten att man har valt den andra boxen i första skedet.

3. Anta att X och Y är stokastiska variabler definierade på ett utfallsrum Ω, för vilka $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$, samt X och Y är oberoende stokastiska variabler. Definiera $Z(\omega) = \max\{X(\omega), Y(\omega)\}$ då $\omega \in \Omega$.

(i) Bestäm fördelningsfunktionen F_Z till Z.

(ii) Beräkna sannolikheten $P(0 < Z < 1)$.

Påminnelse: $Z(\omega) \leq t$ om och endast om $X(\omega) \leq t$ och $Y(\omega) \leq t$.

4. Ett symmetriskt mynt singlas 60 gånger. Låt X vara antalet kronor i singlingarna.

(i) Ange den exakta formeln för sannolikheten $P(20 \leq X \leq 40)$ att erhålla från 20 till 40 kronor.

(ii) Använd normalapproximation till att uppskatta ovanstående sannolikhet. (Svaret kan innehålla lämpliga värden av fördelningsfunktionen Φ till en standardnormalfördelad stokastisk variabel.)

På motstående sida finns en tabell över värden av fördelningsfunktionen $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{t^2/2} dt$ till en standardnormalfördelad stokastisk variabel.

Taulukko 1. Standardinormaalijakauman kertymäfunktion Φ arvoja, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.500000	.503989	.507978	.511966	.515953	.519938	.523922	.527903	.531881	.535856
0.1	.539828	.543795	.547758	.551717	.555670	.559618	.563560	.567495	.571424	.575345
0.2	.579260	.583166	.587064	.590954	.594835	.598706	.602568	.606420	.610261	.614092
0.3	.617911	.621720	.625616	.629300	.633072	.636831	.640576	.644309	.648027	.651732
0.4	.655422	.659097	.662757	.666402	.670031	.673645	.677242	.680822	.684386	.687933
0.5	.691462	.694974	.698468	.702944	.705402	.708840	.712260	.715661	.719043	.722405
0.6	.725747	.729069	.732371	.735653	.738914	.742154	.745373	.748571	.751748	.754903
0.7	.758036	.761148	.764238	.767305	.770350	.773373	.776373	.779350	.782305	.785236
0.8	.788145	.791030	.793892	.796731	.799546	.802338	.805106	.807850	.810570	.813267
0.9	.815940	.818589	.821214	.823814	.826391	.828944	.831472	.833977	.836457	.838913
1.0	.841345	.843752	.846136	.848495	.850830	.853141	.855428	.857690	.859929	.862143
1.1	.864334	.866500	.868643	.870762	.872857	.874928	.876976	.879000	.881000	.882977
1.2	.884930	.886861	.888768	.890651	.892512	.894350	.896165	.897958	.899727	.901475
1.3	.903200	.904902	.906582	.908241	.909877	.911492	.913085	.914656	.916207	.917736
1.4	.919243	.920730	.922196	.923642	.925066	.926471	.927855	.929219	.930563	.931889
1.5	.933193	.934478	.935744	.936992	.938220	.939429	.940620	.941792	.942947	.944083
1.6	.945201	.946301	.947384	.948449	.949497	.950528	.951543	.952540	.953521	.954486
1.7	.955434	.956367	.957284	.958185	.959070	.959941	.960796	.961636	.962462	.963273
1.8	.964070	.964852	.965620	.966375	.967116	.967843	.968557	.969258	.969946	.970621
1.9	.971283	.971933	.972571	.973197	.973810	.974412	.975002	.975581	.976148	.976704
2.0	.977250	.977784	.978308	.978822	.979325	.979818	.980301	.980774	.981237	.981691
2.1	.982136	.982571	.982997	.983414	.983823	.984222	.984614	.984997	.985371	.985738
2.2	.986097	.986447	.986791	.987126	.987454	.987776	.988089	.988396	.988696	.988989
2.3	.989276	.989556	.989830	.990097	.990358	.990613	.990862	.991106	.991344	.991576
2.4	.991802	.992024	.992240	.992451	.992656	.992857	.993053	.993244	.993431	.993613
2.5	.993790	.993963	.994132	.994297	.994457	.994614	.994766	.994915	.995060	.995201
2.6	.995339	.995473	.995604	.995731	.995855	.995975	.996093	.996207	.996319	.996427
2.7	.996533	.996636	.996736	.996833	.996928	.997020	.997110	.997197	.997282	.997365
2.8	.997445	.997523	.997599	.997673	.997744	.997814	.997882	.997948	.998012	.998074
2.9	.998134	.998193	.998250	.998305	.998359	.998411	.998462	.998511	.998559	.998605
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
3.0	.998650	.999032	.999313	.999517	.999663	.999767	.999841	.999892	.999928	.999952

Todennäköisyyslaskenta IIb, marras-joulukuu 2019 / Hytönen
Kurssitentti 20.12.2019

Sallitut omat tarvikkeet:

- Kirjoitusvälineet.
- Ylioppilaskirjoituksissa hyväksyttävä laskin.
- Yksi käsinkirjoitettu (saa olla molemmin puolin) korkeintaan A4-kokoinen "lunttilappu".

*

Yritä ratkaista kaikki tehtävät. Muista perustella ratkaisusi. Hyvä ajatus on kirjoittaa auki käyttämäsi määritelmät, vaikka sitä ei erikseen pyydettäisi. Kirjoita jokaiseen arvosteltavaan paperiin nimesi, opiskelijanumerosi, kurssin nimi ja kokeen päivämäärä. Rauhoitu, keskity, menesty.

*

1. (a) Määrittele satunnaisvektorin $\mathbf{V}$ kovarianssimatriisi $\mathrm{Cov}(\mathbf{V})$.
   (b) Kirjoita $\mathrm{Cov}(\mathbf{V})$ auki kaksiulotteisessa tilanteessa $\mathbf{V} = (X, Y)$ seuraavilla kahdella tavalla:
      i. kummankin satunnaismuuttujan X ja Y varianssin sekä niiden kovarianssin avulla ja
      ii. kummankin satunnaismuuttujan X ja Y varianssin sekä niiden korrelaatiokertoimen avulla.
   (c) Perustele, miksi korrelaatiokerroin ρ toteuttaa ehdon $-1 \leq \rho \leq 1$. (Tätä ei tarvitse todistaa alkeista lähtien. Riittää, kunhan selvität, mihin yleiseen tulokseen tämä perustuu.)

2. Satunnaisvektorilla (X, Y) on jatkuva jakauma. Olkoon sen tiheysfunktio $f_{X,Y}(x, y)$.
   (a) Määritä satunnaismuuttujan $Z = X + 2Y$ tiheysfunktio $f_Z(z)$ (ja osoita erityisesti, että Z on jatkuva satunnaismuuttuja).
   (b) Laske $f_Z(z)$ auki tilanteessa, jossa $X, Y \sim \mathrm{Exp}(1)$ ja $X \perp\!\!\!\perp Y$. Tarkista, että saamasi tulos todella toteuttaa tiheysfunktion vaatimukset.

3. Opettaja suunnittelee todennäköisyyslaskennan tehtäväsarjaa. Hän ei ole etukäteen päättänyt tehtävien lukumäärää, mutta laatii joka tapauksessa ainakin yhden tehtävän. Aina, kun yksi tehtävä on valmis, opettaja heittää kolikkoa. Jos tulos on kruuna, hän päättää, että tehtäväsarja on valmis ja lopettaa. Jos tulos on klaava, hän keksii vielä yhden tehtävän lisää. Sama toistuu aina uuden tehtävän valmistuttua. Oletetaan, että jokaisen uuden tehtävän laatimiseen kuluu satunnainen aika $X_i \sim \mathrm{Exp}(1)$ (yksikkönä tunti). Lisäksi eri tehtävien laadinta-ajat ja eri kolikon heitot ovat kaikki toisistaan riippumattomia. Olkoon Y tehtävien satunnainen lukumäärä näin laadittavassa tehtäväsarjassa ja Z kokonaisaika, joka tehtäväsarjan laatimiseen kuluu. Oletetaan, että kolikon heittämiseen kuluva aika on olemattoman vähäinen.
   (a) Kirjoita satunnaismuuttujalle Z lauseke satunnaismuuttujien Y ja X_i, $i \geq 1$, avulla.
   (b) Määritä $E[Z|Y]$ ja $\mathrm{Var}[Z|Y]$.
   (c) Määritä $E[Z]$ ja $\mathrm{Var}[Z]$.

4. Olkoot $X \sim N(0, \sigma_X^2)$ ja $Y \sim N(0, \sigma_Y^2)$, missä $X \perp\!\!\!\perp Y$. Merkitään $Z = X + Y$.
   (a) Määritä sellainen vakio $a \in \mathbb{R}$ ja sellainen satunnaismuuttujien X ja Y lineaarikombinaatio V, että $X = aZ + V$ ja $Z \perp\!\!\!\perp V$.
   (b) Määritä ehdollinen jakauma $X \mid (Z = z)$.

(English on the other side. – Englanniksi toisella puolella.)

Probability IIb, November-December 2019 / Hytönen
Course exam 20.12.2019

Admissible tools:

- Writing equipment.
- A calculator of the kind allowed in the Finnish matriculation exams (not overly advanced).
- One hand-written (possibly two-sided) at most A4-size "cheat sheet".

*

Try to solve all the problems. Remember to explain your reasoning. It is a good idea to write down the definitions that you use, even when it is not explicitly requested. On each paper to be graded, write down your name, your student number, the name of the course and the date of the exam. Calm down, concentrate, succeed.

*

1. (a) Define the covariance matrix $\mathrm{Cov}(\mathbf{V})$ of a random vector $\mathbf{V}$.
   (b) Write out $\mathrm{Cov}(\mathbf{V})$ in the two-dimensional case $\mathbf{V} = (X, Y)$ both in terms of
      i. the variances and the covariance of the random variables X and Y, and
      ii. the variances and the correlation coefficient of the random variables X and Y.
   (c) Explain, why the correlation coefficient ρ satisfies $-1 \leq \rho \leq 1$. (You don't need to do this from the first principles. It is enough to explain the general result on which this is based.)

2. The random vector (X, Y) has a continuous distribution with density function $f_{X,Y}(x, y)$.
   (a) Determine the density function $f_Z(z)$ of the random variable $Z = X+2Y$ (and show, in particular, that Z is a continuous random variable).
   (b) Compute $f_Z(z)$ in the situation that $X, Y \sim \mathrm{Exp}(1)$ and $X \perp\!\!\!\perp Y$. Check that the result indeed satisfied the requirements for a density function.

3. A teacher is planning an exercise set on probability, but hasn't decided about the number of exercises to be included; however, there will be at least one exercise. Whenever an exercise is finished, the teacher tosses a coin. If the result is heads, the teacher decides that the exercise set is complete, and nothing more is needed. If the result is tails, the teacher will invent yet another exercise. The same procedure is repeated after each completed exercise. Suppose that the time needed to prepare each new exercise is a random variable $X_i \sim \mathrm{Exp}(1)$ (in the unit of hours). Moreover, the preparation times for different exercises and the results of the coin tosses are all independent of each other. Let Y be the random number of exercises in the exercise set so prepared, and Z be the total time needed to prepare the exercise set. Suppose that the time needed to toss the coin is negligible.
   (a) Write down a formula for the random variable Z in terms of the random variables Y and X_i, $i \geq 1$.
   (b) Determine $E[Z|Y]$ and $\mathrm{Var}[Z|Y]$.
   (c) Determine $E[Z]$ and $\mathrm{Var}[Z]$.

4. Let $X \sim N(0, \sigma_X^2)$ and $Y \sim N(0, \sigma_Y^2)$, where $X \perp\!\!\!\perp Y$. Denote $Z = X + Y$.
   (a) Find a number $a \in \mathbb{R}$ and a linear combination V of the random variables X and Y such that $X = aZ + V$ and $Z \perp\!\!\!\perp V$.
   (b) Determine the conditional distribution $X \mid (Z = z)$.

(Suomeksi toisella puolella. – Finnish on the other side.)

Institutionen för matematik och statistik
Sannolikhetslära II
2. mellanförhöret 18.12.2015

Tillåtliga hjälpmedel: normala skrivverktyg, en räknare, en handskriven A4-fusklapp och en MAOL tabellbok.

1. Den simultana täthetsfunktionen av de stokastiska variablerna X och Y är
$$f_{X,Y}(x,y) = c\,(3 + x^2 y)\,1\{\,0 < x < 1,\; 0 < y < x^2\,\}$$

   a) Beräkna det värdet av konstant c. (2p)
   b) Beräkna ett betingat väntevärde $\mathbb{E}(\,Y \mid X = x\,)$, när $0 < x < 1$. (4p)

2. Låt X och Y var stokastiska variabler med den simultana täthetsfunktionen
$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{x^2}{8y^2}\,1\{\,0 < x < 2,\, y > \tfrac{1}{4}x^2\,\}$$
Definera stokastiska variabler
$$U = \frac{X}{2}, \qquad V = 1 - \frac{X^2}{4Y}$$
Beräknä den simultana täthetsfunktionen av U och V (4p) och ge motiverade svar på följande frågor (vink. minst ett svar är positivt)

   a) Har (U,V) en tvådimensionell likformig fördelningen (tasajakauma tasoalueessa)?
   b) Är U och V oberoende?

3. Den simultana fördelningen av X, Y och W är determinerad med den följande hierarkisk modell
$$\begin{cases} X \mid Y \sim N(0, Y^2) \\ Y = W + 1, \\ W \sim \mathrm{Bin}(3, \tfrac{1}{2}) \end{cases}$$

   a) Läs från modellet vad är den betingade täthetsfunktionen (ehdollinen tiheysfunktio) $f_{X|Y}$ och läs från modellet det betingade vänteverdet $\mathbb{E}(X \mid Y)$. (2p)
   b) Beräkna $\mathbb{E}X$. (2p)
   c) Beräkna var X. (2p)

4. Låt $X = (X_1, X_2)$ och $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ vara stokastiska vektorer som är oberoende och har standardiserad multivariat normalfördelning. Låt $Z = (X_1 - Y_2 + 3, 3Y_1 - X_2, 2X_1 + Y_3 - 2) = (Z_1, Z_2, Z_3)$.

   a) Bestäm den fördelningen av stokastiska vektoren Z. (4 p)
   b) Motivera varför de stokastiska variablerna Z_1^2 och $\exp(Z_2 - 3)$ är oberoende? (2 p)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyyslaskenta II
2. kurssikoe 18.12.2015

Sallitut apuvälineet: kirjoitusvälineet, laskin sekä käsinkirjoitettu, A4-kokoinen lunttilappu ja MAOL taulukkokirjaa

1. Satunnaismuuttujien X ja Y yhteistiheysfunktio on
$$f_{X,Y}(x,y) = c\,(3 + x^2 y)\,\mathbf{1}\{\,0 < x < 1,\ 0 < y < x^2\,\}$$
   a) Laske vakion c arvo. (2p)
   b) Laske ehdollinen odotusarvo $\mathbb{E}(\,Y \mid X = x\,)$, kun $0 < x < 1$. (4p)

2. Olkoon X ja Y satunnaismuuttujia, joiden yhteistiheysfunktio on
$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{x^2}{8y^2}\,\mathbf{1}\{\,0 < x < 2,\ y > \tfrac{1}{4}x^2\,\}$$
   Määritellään satunnaismuuttujat
$$U = \frac{X}{2}, \qquad V = 1 - \frac{X^2}{4Y}$$
   Laske satunnaismuuttujien U ja V yhteistiheysfunktio (4p) ja vastaa lyhyesti perustellen seuraaviin kysymyksiin (vihje: ainakin toinen vastauksista on kyllä):
   a) Noudattaako (U, V) tasajakaumaa jossakin tasoalueessa?
   b) Ovatko U ja V riippumattomia?

3. Olkoon X, Y ja W satunnaismuuttujia, joiden jakauman kuvaa hierarkinen malli
$$\begin{cases} X \mid Y \sim N(0, Y^2) \\ Y = W + 1, \\ W \sim \mathrm{Bin}(3, \tfrac{1}{2}) \end{cases}$$
   a) Kerro mallin avulla, mikä on ehdollinen tiheysfunktio $f_{X|Y}$ ja kerro mallin avulla, mikä on ehdollinen odotusarvo $\mathbb{E}(X \mid Y)$. (2p)
   b) Laske $\mathbb{E}X$. (2p)
   c) Laske $\operatorname{var} X$. (2p)

4. Olkoon $X = (X_1, X_2)$ ja $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ riippumattomia standardinormaalijakautuneita satunnaisvektoreita ja olkoon $Z = (X_1 - Y_2 + 3, 3Y_1 - X_2, 2X_1 + Y_3 - 2) = (Z_1, Z_2, Z_3)$.
   a) Määrää satunnaisvektorin Z jakauma. (4 p)
   b) Selitä miksi satunnaismuuttujat Z_1^2 ja $\exp(Z_2 - 3)$ ovat riippumattomia. (2 p)

Institutionen för matematik och statistik
Sannolikhetslära II
1. mellanförhöret 23.10.2015

Tillåtliga hjälpmedel: normala skrivverktyg, en räknare och en handskriven A4-fusklapp. Ingen tabellbok.

1. Vi kastar en sexsidig tärning fem gånger. Låt X vara det antalet av dessa gånger när vi får en siffra 5 eller 6.

   (a) Nämna den fördelningen av den stokastiska variabeln X och ge det väntevärdet av X.

   (b) Vad är sannolikheten att $X = 3$ givet att vi fått 5 med det förstä kastet?

2. Låt $Y \sim U(0,1)$ och definiera $X = Y^3$.

   (a) Bestäm den kumulativa fördelninsfunktionen F_X av den stokastiska variabeln X.

   (b) Bestäm den täthetsfunktionen f_X av den stokastiska variabeln X

   (c) Beräkna $\mathbb{E}X$ och $\operatorname{var} X$.

3. En stokastisk variabel X har en likformig fördelning pä intervallet $(0, 2)$. En stokastisk variabel Y har en exponentialfördelning med väntevärdet 2. De stokastiska variablerna X och Y är oberoende.

   (a) Beräkna $\mathbb{E}(X - 3Y)$.

   (b) Beräkna $\operatorname{var}(X + Y)$.

   (c) Beräkna $\operatorname{cov}(X, X + XY)$.

4. (a) Den momentgenererande funktionen av X är

   $$M(t) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}e^t + \tfrac{1}{2}e^{2t}$$

   Bestäm $\mathbb{E}X$ och $\mathbb{E}(X^2)$.

   (b) Anta att $Z \sim \text{Gam}(3, 2)$ och $Y \sim \text{Gam}(5, 2)$ samt Z och Y är oberoende. Bestäm den momentgenererande funktionen och den fördelningen av $Z + Y$. Den momentgenererande funktionen av gammafördelningen $\text{Gam}(\alpha, \lambda)$ är

   $$M(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\alpha}, \quad (t < \lambda).$$

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Todennäköisyyslaskenta II

1. kurssikoe 23.10.2015

Sallitut apuvälineet: kirjoitusvälineet, laskin sekä käsinkirjoitettu, A4-kokoinen lunttilappu. Ei taulukkokirjaa

1. Tavallista kuusisivuista noppaa heitetään viisi kertaa. Olkoon X niiden heittojen lukumäärä, joilla saadaan silmäluku 5 tai 6.

   (a) Ilmoita satunnaismuuttujan X jakauma sekä kerro sen odotusarvo.

   (b) Millä todennäköisyydellä $X = 3$ ehdolla, että ensimmäisellä heitolla saadaan 5?

2. Olkoon $Y \sim U(0,1)$ ja määritellään $X = Y^3$.

   (a) Määrää satunnaismuuttujan X kertymäfunktio F_X.

   (b) Määrää satunnaismuuttujan X tiheysfunktio f_X.

   (c) Laske $\mathbb{E}X$ ja $\operatorname{var} X$.

3. Satunnaismuuttuja X noudattaa tasajakaumaa välillä $(0,2)$. Satunnaismuuttuja Y on eksponenttijakautunut odotusarvolla 2. Satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia.

   (a) Laske $\mathbb{E}(X - 3Y)$

   (b) Laske $\operatorname{var}(X + Y)$

   (c) Laske $\operatorname{cov}(X, X + XY)$

4. (a) Satunnaismuuttujan X momenttiemäfunktio on

   $$M(t) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}e^t + \tfrac{1}{2}e^{2t}$$

   Määrää $\mathbb{E}X$ ja $\mathbb{E}(X^2)$.

   (b) Oletetaan, että $Z \sim \mathrm{Gam}(3,2)$ ja $Y \sim \mathrm{Gam}(5,2)$ sekä Z ja Y ovat riippumattomia. Määrää satunnaismuuttujan $Z+Y$ momenttiemäfunktio ja jakauma. Gammajakauman $\mathrm{Gam}(\alpha, \lambda)$ momenttiemäfunktio on

   $$M(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\alpha}, \quad (t < \lambda).$$

Matemaattisten tieteiden kandiohjelma / MTO

Tilastollinen päättely I

Kurssikoe 8.5.2019 (kesto 2h 30min)

Sallitut apuvälineet: kirjoitusvälineet ja laskin. Tehtäväpaperin ohessa olevia tietoja jakaumista ja taulukoista saa myös käyttää

1. Henkilö A kirjoittaa harjoitustehtävänä simulointiohjelmaa R:llä. Hänen ohjelmassaan on kuitenkin virhe, joka ilmeneee erikoisena virheilmoituksena ohjelman ajoa toistettaessa todennäköisyydellä $\theta \in [0, 1]$. Kunkin toiston voi ajatella olevan riippumaton. Henkilö A ajaa kuitenkin ohjelmaansa n kertaa, selvittääkseen kuinka usein virhe ilmenee. Satunnaismuuttuja X kuvaa niiden kertojen lukumäärää, milloin ohjelma ilmoittaa virheestä näiden n toistojen aikana.

   (a) Muotoile tilanteeseen sopiva tilastollinen malli. Perustele valintasi huolellisesti.

   (b) Johda huolellisesti perustellen parametrin θ suurimman uskottavuuden estimaattori.

   (c) Henkilö A ajoi ohjelmansa 850 kertaa ja näistä 9 kertaa ohjelma ilmoitti virheestä. Mikä on havaittua aineistoa vastaava suurimman uskottavuuden estimaatti parametrille θ?

2. Tehdas tuottaa tenttitehtäviä varten valkoisia palloja, joiden tavoitesäde on 3 cm. Pallojen säteen on havaittu noudattavan likimain normaalijakaumaa. Kontrollitestin yhteydessä tuotetuista palloista poimitaan satunnaisesti n kappaletta palloa, joiden säteet mitataan. Mallinnetaan tilannetta riippumattomilla satunnaismuuttujilla $Y_1, \ldots, Y_n$, jotka noudattavat jakaumaa $N(\mu, \sigma^2)$, missä $\mu \in \mathbb{R}$ on tuntematon parametri ja $\sigma^2 > 0$ on tunnettu. Tarkastellaan parametrin μ luottamusväliä luottamustasolla $1 - \alpha$, missä $\alpha \in (0, 1)$.

   (a) Kumpi seuraavista sopisi tilanteeseen paremmin: z- vai t- luottamusväli? Perustele valintasi huolellisesti.

   (b) Oletetaan, että $n = 16$, $\sigma^2 = 0.04$ ja havaitaan $\overline{y} = 3.14$. Valitaan $\alpha = 0.05$. Laske luottamustason $1 - \alpha$ kaksisuuntainen luottamusväli parametrille μ.

   (c) Mitä voit tulosten perusteella päätellä pallojen todellisesta säteestä ja otoskoon riittävyydestä?

3. Oletetaan, että havaintoja $y_1, \ldots, y_n$ vastaavat satunnaismuuttujat $Y_1, \ldots, Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattavat jakaumaa $N(\mu, \sigma^2)$, missä molemmat parametrit ovat tuntemattomia. Tarkastellaan hypoteesiparia $H_0 : \mu = \mu_0$ ja $H_1 : \mu \neq \mu_0$.

   (a) Muodosta tilanteeseen sopiva testisuure. Mitä jakaumaa valitsemasi testisuure noudattaa, kun H_0 pätee? Onko kyseessä yksi- vai kaksisuuntainen testi?

   (b) Oletetaan, että testissä on havaittu p-arvo 0.037. Millaisella kaavalla p-arvo olisi laskettu? Hylätäänkö nollahypoteesi merkitsevyystasolla $\alpha = 0.05$?

   (c) Jos parametrille μ laskettaisiin 99 prosentin luottamusväli, niin kuuluisiko piste μ_0 tälle luottamusvälille, jos on havaittu p-arvo 0.037 kuten edellisessä kohdassa?

4. Pöydällä on neljä ulkoapäin täysin identtistä kulhoa. Henkilö B tietää, että

   - kulhossa 1 on 4 valkoista ja yksi vihreä pallo
   - kulhossa 2 on 3 valkoista ja kaksi vihreää palloa

- kulhossa 3 on 6 valkoista palloa
- ja kulhossa 4 on 2 valkoista palloa, yksi vihreä ja yksi keltainen pallo

Henkilö C ei tiedä, minkälaisia palloja kulhoissa on. He valitsevat umpimähkään yhden kulhoista, mutta valitun kulhon numero θ, joka on siis 1,2,3 tai 4, on tuntematon. Henkilö B nostaa sekoittaen takaisinpanolla valitusta θ kulhosta kaksi kertaa, ja näyttää pallon henkilölle C. Kummallakin kerralla pallo on valkoinen. Esitä parametrille θ priorijakauma, uskottavuusfunktio sekä posteriorijakauma luettelemalla niiden arvot.

Muistin tueksi

$$X \sim \mathrm{Bin}(n,p) \implies P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0,1,\dots,n;$$
$$EX = np \text{ ja } \mathrm{Var}X = np(1-p).$$
$$X \sim \mathrm{Hyperg}(N,K,n) \implies P(X=k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}},\ k = 0,1,\dots,n;$$
$$EX = n\frac{K}{N} \text{ ja } \mathrm{Var}X = n\frac{K}{N}\frac{N-K}{N}\frac{N-n}{N-1}.$$
$$X \sim \mathrm{Geom}_0(p) \implies P(X=k) = p(1-p)^k,\ k = 0,1,2,\dots;$$
$$EX = \frac{1-p}{p} \text{ ja } \mathrm{Var}X = \frac{1-p}{p^2}.$$
$$X \sim \mathrm{Geom}_1(p) \implies P(X=k) = p(1-p)^{k-1},\ k = 1,2,3,\dots;$$
$$EX = \frac{1}{p} \text{ ja } \mathrm{Var}X = \frac{1-p}{p^2}.$$
$$X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda) \implies P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k = 0,1,2,\dots;\quad EX = \lambda \text{ ja } \mathrm{Var}X = \lambda.$$
$$X \sim \mathrm{Tas}(a,b) \implies f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a,b), \\ 0, & \text{muulloin;} \end{cases} \quad EX = \frac{a+b}{2} \text{ ja } \mathrm{Var}X = \frac{(b-a)^2}{12}.$$
$$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda) \implies f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{muulloin;} \end{cases} \quad EX = \frac{1}{\lambda} \text{ ja } \mathrm{Var}X = \frac{1}{\lambda^2}.$$
$$X \sim N(\mu,\sigma^2) \implies f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ x \in \mathbb{R};\quad EX = \mu \text{ ja } \mathrm{Var}X = \sigma^2.$$

Standardinormaalijakauman yläkvantiileja

α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
z_α	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

t-jakauman yläkvantiileja

α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
$t_2(\alpha)$	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92
$t_3(\alpha)$	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84
$t_4(\alpha)$	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60
$t_5(\alpha)$	1.48	2.02	2.57	3.36	4.03
$t_6(\alpha)$	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71
$t_7(\alpha)$	1.41	1.89	2.36	3.00	3.50
$t_8(\alpha)$	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36
$t_9(\alpha)$	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25
$t_{10}(\alpha)$	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17
$t_{11}(\alpha)$	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11
$t_{12}(\alpha)$	1.36	1.78	2.18	2.68	3.05
$t_{13}(\alpha)$	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01
$t_{14}(\alpha)$	1.35	1.76	2.14	2.62	2.98
$t_{15}(\alpha)$	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95
$t_{16}(\alpha)$	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92
$t_{17}(\alpha)$	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90
$t_{18}(\alpha)$	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88
$t_{19}(\alpha)$	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86
$t_{20}(\alpha)$	1.33	1.72	2.09	2.53	2.85
$t_{21}(\alpha)$	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83
$t_{22}(\alpha)$	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82
$t_{23}(\alpha)$	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81
$t_{24}(\alpha)$	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80
$t_{25}(\alpha)$	1.32	1.71	2.06	2.49	2.79
$t_{26}(\alpha)$	1.31	1.71	2.06	2.48	2.78
$t_{27}(\alpha)$	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77
$t_{28}(\alpha)$	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76
$t_{29}(\alpha)$	1.31	1.70	2.05	2.46	2.76
$t_{30}(\alpha)$	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75

Tilastollinen päättely I 12. 5. 2017
Kurssikoe 2h 30min

1. Olkoon $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \text{Poisson}(\mu)$ riippumattomia, $\mu > 0$. Poissonin jakaumaa noudattavalla satunnaismuuttujalla on pistetodennäköisyysfunktio
$$f(x;\mu) = e^{-\mu}\frac{\mu^x}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \dots$$
Johda huolellisesti parametrin μ suurimman uskottavuuden estimaattori $\hat{\mu}$.

2. Olkoon $X_1, X_2, \dots, X_n$ riippumattomia $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$-jakautuneita satunnaismuuttujia, missä $\mu, \sigma^2 \in \mathbb{R}$ ovat tuntemattomia parametreja ja $\sigma^2 > 0$. Merkitään $\overline{X} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
   (i) Tarkastellaan parametrin μ (kiinnostusparametri) luottamusväliä ja satunnaismuuttujia
   $$Y_1 = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma^2/\sqrt{n}}$$
   ja
   $$Y_2 = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}},$$
   missä S on otoskeskihajonta. Luottamusväli voidaan muodostaa helposti käyttäen sopivaa saranasuuretta. Onko Y_1 saranasuure? Entä Y_2? Perustele.
   (ii) Oletetaan nyt, että $\sigma^2 = 1$ on tunnettu. Esitä kaksisuuntainen 95%-luottamusväli parametrille μ. Kuinka suuri otoskoko olisi valittava, että luottamusvälin leveydeksi tulisi noin 1? Entä jos valittaisiin vastaava 90%-luottamusväli?

3. Viesti lähetetään koodattuina biteiksi, eli se koostuu nollista ja ykkösistä. Viestistä $1/10$ on ykkösiä, ja $9/10$ nollia. Lähetysyhteys on kuitenkin huono, joten viestiä välitettäessä $1/5$ nollista muuttuu ykkösiksi, ja $1/3$ ykkösistä nolliksi.
   (i) Laske todennäköisyys, että viestiä vastaanotettaessa yksittäinen (satunnaisesti valittu) merkki on ykkönen.
   (ii) Viestiä vastaanotettaessa merkki on ykkönen. Laske todennäköisyys, että se oli ykkönen myös alkuperäisessä viestissä.

4. Havainnot ovat luvut $y_1, \dots, y_n$. Oletamme, että nämä ovat satunnaismuuttujien $Y_1, \dots, Y_n$ havaittuja arvoja ja että $Y_1, \dots, Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattavat jakaumaa $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$, jossa sekä μ että σ^2 ovat tuntemattomia. Haluamme testata hypoteesia $\mu \geq \mu_0$, kun vastahypoteesina on $H_1 : \mu < \mu_0$. Testi perustuu testisuureeseen
   $$t = \frac{\overline{y} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}.$$
   (i) Selitä, kuinka tämän testin p-arvo määritellään ja selitä, kuinka sen saisi laskettua esimerkiksi taulukoiden tai tietokoneiden avulla. (Voit ajatella, että nollahypoteesi on $\mu = \mu_0$).
   (ii) Testi pyydetään suorittamaan merkitsevyystasolla $\alpha = 0.05$. Mitä tarkoittaa hylkäämisvirhe (omin sanoin) ja mitä voidaan sanoa hylkäämisvirheen todennäköisyydestä tässä testitilanteessa?
   (iii) Oletetaan, että testin p-arvoksi tuli $p = 0.09$. Hylätäänkö nollahypoteesi H_0 vai jääkö se voimaan, kun merkitsevyystaso on $\alpha = 0.05$?

Standardinormaalijakauman yläkvantiileja:

α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
z_α	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Introduktion till statistisk inferens
Kursprov 11. 5. 2015

Obs. I kursprovet får ni använda en kalkylator samt en dubbelsidig handskriven "luntlapp" av storlek A4. Egna tabeller eller formelsamlingar får inte användas. Den erforderliga tabellen finns som bihang.

1. Ett mynt är viktat på ett för oss okänt sätt, så att vi inte vet med vilken sannolikhet man erhåller en klave vid myntsingling. Låt denna sannolikhet vara θ, där $0 < \theta < 1$. Vi betraktar ett försöksarrangemang, där myntet singlas 100 gånger och man räknar antalet klavar X.

a) Vilken fördelning, som beror av θ, har den stokastiska variabeln X (fördelningens benämning och frekvensfunktion)?

b) Vilket är maximum-likelihood-estimatet till parametern θ, då man erhöll $X = 65$ klavar? Motivera.

2. Den genomsnittliga brotthållfastheten av ett rep har varit 1800 kg. Fabriken ändrar tillverkningssättet och önskar att brotthållfastheten ökar efter detta. Man undersökte 16 rep som producerats på det nya sättet och erhöll 1840 kg som deras genomsnittliga brotthållfastheter, där standardavvikelsen var 70 kg. Testa på signifikansnivån 0.05 om man kan dra slutsatsen att den genomsnittliga brotthållfastheten verkligen har ökat. Kom ihåg att tydligt formulera de hypoteser som testas. Anta att variationerna av brotthållfastheten är (approximativt) normalfördelade.

3. a) Parametern θ i den statistiska modellen $f(\mathbf{y}; \theta)$ är endimensionell dvs. reell. På basen av data $\mathbf{y}$ bör man bilda 95 %:s konfidensintervall $[L, U]$ för θ, där L och U är reella tal. Förklara vad som avses med detta och speciellt hur talet 95 % eller 0.95 bör förstås i tolkningen.

b) Anta att man har funnit sampelkarakteristikan i modellen i a-fallet, dvs. en transformation $t = t(\mathbf{y})$ av data, så att för motsvarande stokastiska variabel $T = t(\mathbf{Y})$ gäller att $T - \theta \sim N(0, 1)$ för alla värden på θ. Härled med hjälp av detta 95 %:s konfidensintervall för θ (dvs. utryck för talen L och U).

4. Framme finns tre identiska skålar, som var och en innehåller fem bollar: i skål 1 finns fem vita bollar, i skål 2 finns två vita och tre svarta bollar och i skål 3 finns en vit och fyra svarta bollar.

En av skålarna väljs på måfå, men numret K (1, 2 eller 3) av den utvalda skålen avslöjas inte, utan det är en okänd parameter. Från den utvalda skålen drar man bollar på måfå, så att den dragna bollen alltid returneras till skålen före nästa dragning. Den första bollen som dras är svart och likaså den andra dragna bollen är svart. Formulera apriorifördelningen och härled aposteriorifördelningen till K.

Tabell: u-övre kvantiler $t_\nu(u)$ till t-fördelningen, för vilka $u = P(X > t_\nu(u))$, då $X \sim t_\nu$. Här är ν frihetsgradtalet till fördelningen och t_∞ avser standardnormalfördelningen $N(0,1)$.

$\nu \backslash u$	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
1	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31
2	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214
4	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
31	1.696	2.040	2.453	2.744	3.375
32	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365
33	1.692	2.035	2.445	2.733	3.356
34	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348
35	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340
36	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333
37	1.687	2.026	2.431	2.715	3.326
38	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319
39	1.685	2.023	2.426	2.708	3.313
40	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
45	1.679	2.014	2.412	2.690	3.281
50	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261
∞	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

Matemaattisten tieteiden kandiohjelma / MTO

Tilastollinen päättely IIa

Kurssikoe 18.12.2019 (kesto 2h 30min)

Sallitut apuvälineet: kirjoitusvälineet, laskin sekä käsinkirjoitettu, A4-kokoinen lunttilappu.

1. Olkoon $\theta > 0$ positiivinen parametri, ja asetetaan

$$f(y;\theta) = \begin{cases} 3\theta^{-1}(y-1)^2\exp(-(y-1)^3/\theta), & \text{kun } y > 1 \\ 0, & \text{muuten} \end{cases}$$

Oletetaan, että $Y_1, \ldots, Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattavat kukin yllä mainittua jakaumaa. Olkoon $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ annettu aineisto, $y_i > 1$ kaikilla i. Muodosta tämän mallin uskottavuusfunktio ja log-uskottavuusfunktio sekä määritä suurimman uskottavuuden estimaatti $\widehat{\theta}$. Mikä on parametrin $\lambda = \theta^3 + 2\theta$ suurimman uskottavuuden estimaatti?

2. Olkoon $Y_1, \ldots, Y_n \sim \mathrm{P}(\lambda)$ riippumattomia, missä $\lambda > 0$ ja olkoon $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ annettu aineisto, $y_i > 0$ kaikilla i. Laske mallin aineistosta havaittu informaatio $j(\lambda; \mathbf{y})$ sekä mallin Fisherin informaatio $i(\lambda)$ parametrille λ.

3. Olkoon $Y_1, \ldots, Y_n \sim G(2, 2/\mu)$ riippumattomia, gammajakautuneita satunnaismuuttujia, missä $\mu > 0$ ja olkoon $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ annettu aineisto, $y_i > 0$ kaikilla i. Näytä, että estimaattori $\overline{Y} = n^{-1}(Y_1 + \cdots + Y_n)$ on parametrin $g(\mu) = \mu$ harhaton, tarkentuva ja täystehokas estimaattori.

4. Olkoon $Y_1, \ldots, Y_n \sim N(\mu_0, \sigma^2)$ riippumattomia satunnaismuuttujia, joista μ_0 tunnetaan, mutta $\sigma^2 > 0$ on tuntematon parametri. Johda suurimman uskottavuuden estimaattori $\widehat{\sigma}^2$. Laske mallin Fisherin informaatio $i(\sigma^2)$ varianssiparametrille σ^2. Vastaa lisäksi perustellen kysymyksiin: a) Onko $\widehat{\sigma}^2$ harhaton estimaattori? b) Millaista jakaumaa $\widehat{\sigma}^2$ noudattaa asymptoottisesti? c) Onko $\widehat{\sigma}^2$ tarkentuva estimaattori?

$|\hat{Y}|$

Jakaumia:

- Satunnaismuuttuja $X \sim \mathrm{G}(\kappa, \lambda)$ noudattaa gammajakaumaa parametreilla $\kappa > 0$, $\lambda > 0$. Sen tiheysfunktio on
$$f_X(x; \kappa, \lambda) = \frac{\lambda^\kappa}{\Gamma(\kappa)} x^{\kappa-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}\{ x > 0 \},$$
odotusarvo $\mathbb{E}X = \kappa/\lambda$ ja varianssi $\operatorname{var} X = \kappa/\lambda^2$. Riippumattomien gammajakautuneitten $X_i \sim \mathrm{G}(\kappa_i, \lambda)$ summa on gammajakautunut $X_1 + \cdots + X_n \sim \mathrm{G}(\sum \kappa_i, \lambda)$. Jos $X \sim \mathrm{G}(\kappa, \lambda)$ ja $c > 0$ vakio, niin $cX \sim \mathrm{G}(\kappa, \lambda/c)$.

- Satunnaismuuttuja $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ noudattaa eksponenttijakaumaa parametrilla $\lambda > 0$. Tämä on gammajakauman erikoistapaus $\mathrm{Exp}(\lambda) = \mathrm{G}(1, \lambda)$, ja sen tiheysfunktio on
$$f_Y(y; \lambda) = \lambda e^{-\lambda y} \mathbf{1}\{ y > 0 \},$$
odotusarvo $\mathbb{E}Y = 1/\lambda$ ja varianssi $\operatorname{var} Y = 1/\lambda^2$. Eksponenttijakauman kertymäfunktio $F_Y(y) = (1 - e^{-\lambda y})\mathbf{1}\{ y > 0 \}$.

- Satunnaismuuttuja $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ noudattaa normaalijakaumaa parametreilla μ ja $\sigma^2 > 0$. Sen tiheysfunktio on siten
$$f_Z(z; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(z-\mu)^2/2\sigma^2},$$
odotusarvo $\mathbb{E}Z = \mu$ ja varianssi $\operatorname{var} Z = \sigma^2$.

- Satunnaismuuttuja $W \sim \mathrm{Tas}(a, b)$ noudattaa tasajakaumaa välillä (a, b), missä $b > a$. Sen tiheysfunktio on
$$f_W(w; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{kun } a < w < b \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$
Odotusarvo $\mathbb{E}W = \frac{1}{2}(a + b)$ ja varianssi $\operatorname{var} W = \frac{1}{12}(b - a)^2$.

- Diskreetti satunnaismuuttuja $W \sim \mathrm{P}(\mu)$ noudattaa Poissonin jakaumaa parametrilla μ. Sen pistetodennäköisyysfunktio on
$$f_W(w; \mu) = \begin{cases} e^{-\mu}\mu^w/w!, & \text{kun } w = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$
Odotusarvo $\mathbb{E}W = \mu$ ja varianssi $\operatorname{var} W = \mu$. Riippumattomien Poisson-jakautuneitten satunnaismuuttujien $X_i \sim \mathrm{P}(\mu_i)$ summa on Poisson-jakautunut $X_1 + \cdots + X_n \sim \mathrm{P}(\sum \mu_i)$.

Matematiikan ja tilastotieteen osasto
Algebralliset rakenteet I
Kurssikoe 6.3.2019 (kesto 2 h 30 min)

Taulukkokirjan, laskimen ja muiden apuvälineiden käyttö ei ole sallittua.
Muista perustella vastauksesi huolellisesti.

1. Määritellään joukossa $\mathbb{Q}$ laskutoimitus $*$ seuraavasti:

$$a * b = -4ab \text{ kaikilla } a, b \in \mathbb{Q}.$$

Yhtälön oikean puolen kertolasku on tavallinen rationaalilukujen kertolasku. Onko laskutoimitus $*$ liitännäinen? Entä vaihdannainen? Osoita, että laskutoimituksella on neutraalialkio. Mikä on alkion $1/2$ käänteisalkio?

2. Tarkastellaan symmetristä ryhmää S_7.

a) Kirjoita permutaatio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 7 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

erillisten syklien tulona.

b) Määritä $(162) \cdot (12)(34)$.

c) Määritä $((62)(17))^{-3}$.

d) Ratkaise yhtälö $(315) \cdot x \cdot (14) = (12)$.

3. Tarkastellaan neliön symmetriaryhmää D_4, jonka laskutoimitustaulukko on tämän paperin kääntöpuolella.

a) Ryhmällä D_4 on aliryhmä $H = \{E, P_1\}$. Määritä aliryhmän H vasempien sivuluokkien joukko D_4/H.

b) Palautetaan mieleen, että ryhmän G *keskus* on sen aliryhmä

$$Z = \{g \in G \mid xg = gx \text{ kaikilla } x \in G\}.$$

Määritä ryhmän D_4 keskus.

4. Oletetaan, että G ja H ovat ryhmiä ja $f\colon G \to H$ isomorfismi. Merkitään ryhmien G ja H neutraalialkioita symboleilla e_G ja e_H.

a) Osoita, että $f(e_G) = e_H$.

b) Oletetaan, että ryhmässä G pätee $g^2 = e_G$ kaikilla $g \in G$. Osoita, että ryhmässä H pätee $h^2 = e_H$ kaikilla $h \in H$.

	E	K_{90°	K_{180°	K_{270°	P_1	P_2	P_3	P_4
E	E	K_{90°	K_{180°	K_{270°	P_1	P_2	P_3	P_4
K_{90°	K_{90°	K_{180°	K_{270°	E	P_4	P_1	P_2	P_3
K_{180°	K_{180°	K_{270°	E	K_{90°	P_3	P_4	P_1	P_2
K_{270°	K_{270°	E	K_{90°	K_{180°	P_2	P_3	P_4	P_1
P_1	P_1	P_2	P_3	P_4	E	K_{90°	K_{180°	K_{270°
P_2	P_2	P_3	P_4	P_1	K_{270°	E	K_{90°	K_{180°
P_3	P_3	P_4	P_1	P_2	K_{180°	K_{270°	E	K_{90°
P_4	P_4	P_1	P_2	P_3	K_{90°	K_{180°	K_{270°	E

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebralliset rakenteet I
Kurssikoe 7.3.2018 (kesto 2 h 30 min)

1. a) Mitkä seuraavista jäännösluokkia koskevista laskuista on laskettu oikein?

$$[3]_8 + [7]_8 = [5]_8 \qquad [-2]_4 + [3]_4 = [-7]_4 \qquad -[4]_5 = [6]_5$$

Perustele vastauksesi.

b) Määritellään rationaalilukujen joukossa laskutoimitus $*$ ehdolla

$$a * b = a - 10 + b.$$

Osoita, että laskutoimituksella on neutraalialkio. Onko luvulla 2 käänteisalkiota laskutoimituksen $*$ suhteen?

2. a) Kirjoita permutaatio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 7 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

erillisten syklien tulona.

b) Mikä on alkion $(1\ 3)(2\ 5\ 4)$ kertaluku ryhmässä S_5?

c) Laske

$$((1\ 3)(2\ 5\ 4))^{2018}.$$

3. a) Oletetaan, että G on vaihdannainen ryhmä, ja ryhmä H on isomorfinen ryhmän G kanssa. Osoita, että myös ryhmä H on vaihdannainen.

b) Ovatko ryhmät $\mathbb{Z}_6$ ja S_3 isomorfiset?

c) Ovatko ryhmät $\mathbb{Z}_6$ ja $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ isomorfiset?

d) Ovatko ryhmät $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ja S_3 isomorfiset?

4. Tarkastellaan neliön symmetriaryhmää D_4, jonka laskutoimitustaulukko on tämän paperin kääntöpuolella.

a) Onko ryhmä D_4 syklinen?

b) Mitkä ovat Lagrangen lauseen nojalla mahdollisia ryhmän D_4 aliryhmän kertalukuja?

c) Anna esimerkkejä ryhmän D_4 aliryhmistä (ainakin yksi esimerkki kutakin b)-kohdassa löytämääsi mahdollista kertalukua kohti).

	E	$K_{90°}$	$K_{180°}$	$K_{270°}$	P_1	P_2	P_3	P_4
E	E	$K_{90°}$	$K_{180°}$	$K_{270°}$	P_1	P_2	P_3	P_4
$K_{90°}$	$K_{90°}$	$K_{180°}$	$K_{270°}$	E	P_4	P_1	P_2	P_3
$K_{180°}$	$K_{180°}$	$K_{270°}$	E	$K_{90°}$	P_3	P_4	P_1	P_2
$K_{270°}$	$K_{270°}$	E	$K_{90°}$	$K_{180°}$	P_2	P_3	P_4	P_1
P_1	P_1	P_2	P_3	P_4	E	$K_{90°}$	$K_{180°}$	$K_{270°}$
P_2	P_2	P_3	P_4	P_1	$K_{270°}$	E	$K_{90°}$	$K_{180°}$
P_3	P_3	P_4	P_1	P_2	$K_{180°}$	$K_{270°}$	E	$K_{90°}$
P_4	P_4	P_1	P_2	P_3	$K_{90°}$	$K_{180°}$	$K_{270°}$	E

$P_4 \cdot K_{90°} = P_1$

$K_{90°} \cdot P_4 = P_3$ $\qquad$ $3 \cdot \frac{1}{3} = E$

$n = 4$: $\{E, K_{90}, K_{180}, K_{270}\}$

$n = 2$: $\{E, P_1\}$

Helsingin Yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Algebralliset rakenteet I
Kurssikoe
08.03.2017

Kaikki vastaukset tulee perustella huolellisesti.

1. Olkoon $X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ kaikkien funktioiden joukko reaaliluvuilta itselleen. Määritellään tähnän joukkoon laskutoimitus $\oplus$ seuraavasti: $f \oplus g = h$, missä $h(x) = f(x) + g(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $+$ on tavallinen reaalilukujen yhteenlasku.
   (a) Osoita, että $(X, \oplus)$ on ryhmä.
   (b) Osoita että $Y = \{f \in X \mid f(0) = 0\} \subset X$ on aliryhmä.

2. Olkoon $A = \{a, b, c\}$ ja olkoon $\star$ joukossa A määritelty laskutoimitus siten että $(A, \star)$ on ryhmä, jonka neutraalialkio on a. Osoita, että A on syklinen ryhmä.

3. (a) Osoita, että jos $[m]_7 = [n]_7$, niin $[3m]_7 = [3n]_7$ kaikilla $n, m \in \mathbb{Z}$.
   (b) Olkoon $f : \mathbb{Z}_7 \to \mathbb{Z}_7$ määritelty kaavalla $f([n]_7) = [3n]_7$. Osoita, että f on isomorfismi ryhmästä $(\mathbb{Z}_7, +)$ itselleen, eli automorfismi.

4. Ratkaise ryhmässä S_4 yhtälö $(23)x^{-1}(124) = (34)^4$. Kirjoita vastaus sievennetyssä muodossa.

$(25)(45) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ & 5 & \end{pmatrix}$

$(24)(25) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (254)$

$(254)(245) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (1)$

Algebralliset rakenteet I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Yleistentti, tentin kestoaika 3.5 tuntia
18.05.2016

Laskimen tai taulukkokirjan käyttö ei ole sallittua.

1. Olkoon $H = \{(1), (254), (245)\}$.
   a) Osoita, että H on ryhmän S_5 aliryhmä.
   b) Osoita, että $H = \langle (245) \rangle$.

2. a) Miten kuuluu Lagrangen lause?
   b) Määritä aliryhmän $\{(1), (24)\}$ sivuluokat ryhmässä $G = \{(1), (24), (25), (45), (254), (245)\}$.

3. a) Olkoon G vaihdannainen ryhmä, jolla on aliryhmät H ja K. Osoita, että aliryhmien tulo $HK = \{hk \mid h \in H,\ k \in K\}$ on G:n aliryhmä.
   b) Anna esimerkki ryhmästä G ja sen aliryhmistä H ja K, joiden tulo HK ei ole aliryhmä.

4. Tarkastellaan ryhmää $S_{\mathbb{R}} = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ on kääntyvä}\}$, jonka laskutoimituksena on kuvausten yhdistäminen. Osoita, että joukko

$$H = \{f \in S_{\mathbb{R}} \mid f(3) = 3\}$$

on ryhmän $S_{\mathbb{R}}$ aliryhmä.

5. Olkoon G syklinen ryhmä ja $f : G \to H$ ryhmähomomorfismi. Osoita, että kuvajoukko $f(G)$ on syklinen ryhmä.

Algebralliset rakenteet I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kurssikoe
9.3.2016

Koeaika on kaksi ja puoli tuntia.

1. Ohessa on annettu erään ryhmän $G = \{a, b, c, d, x, y\}$ kertotaulu.

$\cdot$	a	b	c	d	x	y
a	a	b	c	d	x	y
b	b	c	a	x	y	d
c	c	a	b	y	d	x
d	d	x	y	b	c	a
x	x	y	d	c	a	b
y	y	d	x	a	b	c

d
$d^2 = b$
$d^3 = x$
$d^4 = c$
$d^5 = y$
$d^6 = a$

   (a) Määritä alkio d^{-2}.

   (b) Määritä alkion b kertaluku.

   (c) Onko ryhmä G syklinen?

2. Määritellään kokonaislukujen laskutoimitus $*$ seuraavasti. Jos $a, b \in \mathbb{Z}$, niin

$$a * b = a + b - 1.$$

   Osoita, että $(\mathbb{Z}, *)$ on ryhmä.

3. Tutkitaan ryhmää S_6.

   (a) Määritä tulo $(153)(24) \cdot (14)(23)$.

   (b) Määritä alkion $(132)(564)$ käänteisalkio.

   (c) Osoita, että kuvaus $f\colon S_5 \to S_5$, $f(\sigma) = (146)\sigma(164)$ on ryhmäisomorfismi.

4. a) Miten kuuluu Lagrangen lause? Kuvaile omin sanoin, miksi lause pitää paikkansa.

   b) Määritä aliryhmän $\{[0]_8, [4]_8\}$ vasemmat sivuluokat ryhmässä $\mathbb{Z}_8$.

Algebralliset rakenteet I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kurssikoe
04.03.2015

Koeaika on kolme tuntia. Kokeessa ei saa käyttää laskinta tai taulukkokirjaa.

1. Määritellään joukossa $\mathbb{Z}_4$ laskutoimitus $*$ ehdolla $[a]_4 * [b]_4 = [3ab]_4$.

   (a) Osoita, että laskutoimitus $*$ on liitännäinen.

   (b) Onko laskutoimituksella neutraalialkiota?

2. (a) Tutkitaan ryhmää S_6. Määritä tulo $(135)(24) \cdot (13)(25)$, ja määritä myös alkion $(124)(563)$ käänteisalkio.

   (b) Määrittele seuraavat käsitteet: virittäminen, syklinen ryhmä, aliryhmän määräämä sivuluokka.

3. Ryhmällä $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ on aliryhmä $H = \{7^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ja ryhmällä $(\mathbb{Z}, +)$ on aliryhmä $3\mathbb{Z} = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

   (a) Osoita, että ryhmät H ja $7\mathbb{Z}$ ovat isomorfiset.

   (b) Ovatko ryhmät $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ ja $(\mathbb{Z}, +)$ syklisiä? Entä aliryhmät H ja $7\mathbb{Z}$?

4. (a) Onko ryhmällä S_5 aliryhmää, jonka kertaluku on seitsemän?

   (b) Ryhmällä $\mathbb{Z}_{12}$ on aliryhmä $H = \{[0]_{12}, [3]_{12}, [6]_{12}, [9]_{12}\}$. Mitä Lagrangen lause kertoo aliryhmän H indeksistä eli (vasempien) sivuluokkien lukumäärästä? Määritä sivuluokat.

Institutionen för matematik och statistik
Algebraiska strukturer II
Kursprov 11.5.2018 (längd 2 h 30 min)

1. Vi undersöker ringen $R = \{a, b, c, d\}$, som har följande tabeller för räkneoperationerna:

$+$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	a	c
d	a	d	c	b

a) Vilket är enhetselementet i ringen R?

b) Är ringen R en kropp?

c) Lös ekvationen $x^2 - 3x + 1 = 0$ i ringen R.

2. a) Finns det en homomorfism $f\colon (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Q}, +)$, för vilken $f(1) = 1$?

b) Finns det en homomorfism $g\colon (\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$, för vilken $g(1) = 1$?

c) Anta att $h\colon G \to G'$ är en homomorfism mellan grupper. Visa: om gruppen G är cyklisk, så är också bildmängden $\mathrm{Im}h$ cyklisk.

3. Vi betraktar kvadratens symmetrigrupp D_4, vars multiplikationstabell för räkneoperationen finns på motstående sida av detta papper. Vi antar det känt att $N = \{E, K_{180}\}$ är en normal undergrupp till gruppen D_4.

a) Bestäm elementen i faktorgruppen D_4/N.

b) Hur ser multiplikationstabellen ut för faktorgruppen D_4/N?

c) Vilka är ordningarna hos elementen i faktorgruppen?

4. a) Är polynomet $X^3 + 2X + 2 \in \mathbb{Z}_3[X]$ irreducibelt? Om det inte är det, så skriv polynomet som en produkt av irreducibla polynom.

b) Är polynomet $X^3 + X^2 - X - 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$ irreducibelt? Om det inte är det, så skriv polynomet som en produkt av irreducibla polynom.

$\longrightarrow$

	E	K_{90°	K_{180°	K_{270°	P_1	P_2	P_3	P_4
E	E	K_{90°	K_{180°	K_{270°	P_1	P_2	P_3	P_4
K_{90°	K_{90°	K_{180°	K_{270°	E	P_4	P_1	P_2	P_3
K_{180°	K_{180°	K_{270°	E	K_{90°	P_3	P_4	P_1	P_2
K_{270°	K_{270°	E	K_{90°	K_{180°	P_2	P_3	P_4	P_1
P_1	P_1	P_2	P_3	P_4	E	K_{90°	K_{180°	K_{270°
P_2	P_2	P_3	P_4	P_1	K_{270°	E	K_{90°	K_{180°
P_3	P_3	P_4	P_1	P_2	K_{180°	K_{270°	E	K_{90°
P_4	P_4	P_1	P_2	P_3	K_{90°	K_{180°	K_{270°	E

Algebralliset rakenteet II kurssikoe 10.05.2017
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

1. Olkoon $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ varustettuna tavallisilla laskutoimituksilla $+$ ja $\cdot$.

   (a) Osoita, että R on rengas,

   (b) Osoita, että se on renkaan $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ alirengas.

   (c) Onko R renkaan $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ideaali?

2. Olkoon G ja H ryhmiä ja $f \colon G \to H$ ryhmähomomorfismi. Osoita, että ydin $\mathrm{Ker}(f)$ on G:n normaali aliryhmä.

3. Tarkastellaan polynomia $X^4 + 2X^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$.

   (a) Onko polynomilla juuria?

   (b) Onko se jaoton?

4. Olkoon $G = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$, $H = (\mathbb{Z}, +)$ ja $J = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset G$. ja olkoon $f \colon G \to H$ määritelty kaavalla $f(n, m) = n - m$.

   (a) Osoita, että f on homomorfismi.

   (b) Osoita, että $G/J \cong H$ (ryhmien homomorfialausetta saa käyttää).

5. Onko polynomirenkaan $\mathbb{Z}_5[X]$ alkio $3X^2 - 1$ yksikkö? Jos ei, anna esimerkki renkaan $\mathbb{Z}_5[X]$ yksiköstä, joka ei ole 1.

Algebralliset rakenteet II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kurssikoe
6.5.2015

Koeaika on kolme tuntia.

1. (12 pistettä)
   (a) Mikä on renkaan $\mathbb{Z}_6[X]$ polynomin $18X^7 + 13X^4 - 3X$ aste?
   (b) Mitä seuraavista renkaan $\mathbb{Z}_4[X]$ polynomeista vastaa sama polynomikuvaus?
   $$P = 2X^2 - 1, \quad Q = 4X^3 + 2X^2 + 3, \quad R = X^2 + 1$$

2. (6 pistettä) Joukko $R = \{[0]_{10}, [2]_{10}, [4]_{10}, [6]_{10}, [8]_{10}\}$ on rengas jäännösluokkien tavallisen yhteen- ja kertolaskun suhteen.
   (a) Mikä on renkan ykkösalkio?
   (b) Mitä renkaan R alkiota vastaa kokonaisluku 4? Entä -2?

3. (12 pistettä) Ryhmällä S_4 on normaali aliryhmä $A = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia tekijäryhmässä S_4/A? Perustele väitteesi huolellisesti käyttäen tekijäryhmän kertolaskun määritelmää.
   (a) $(13)A \cdot (12)A = (134)A$
   (b) $((132)A)^{-1} = (13)A$
   (c) Joukko $\{A, (123)A, (124)A\}$ on ryhmän S_4/A aliryhmä.

4. (6 pistettä) Olkoon $G = \langle g \rangle$ syklinen ryhmä, jolla on normaali aliryhmä N. Osoita, että tekijäryhmä G/N on syklinen.

5. (12 pistettä) Tutkitaan kuvausta $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $f(a) = (-1)^a$.
   (a) Osoita, että f on ryhmähomomorfismi.
   (b) Määritä f:n ydin. Perustele vastauksesi huolellisesti.
   (c) Määritä isomorfismi $\bar{f}$, joka kuvauksesta f saadaan ryhmien homomorfialauseen avulla.
   (d) Kuvaus f ei ole injektio. Kuvaile lyhyesti omin sanoin, miksi kuvaus $\bar{f}$ on injektio. Voit halutessasi piirtää avuksi kuvan. Tarkkaa todistusta ei tarvita.

Algebralliset rakenteet II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kurssikoe
6.5.2015

Koeaika on kolme tuntia.

1. (12 pistettä)

   (a) Mikä on renkaan $\mathbb{Z}_6[X]$ polynomin $18X^7 + 13X^4 - 3X$ aste?

   (b) Mitä seuraavista renkaan $\mathbb{Z}_4[X]$ polynomeista vastaa sama polynomikuvaus?

$$P = 2X^2 - 1, \quad Q = 4X^3 + 2X^2 + 3, \quad R = X^2 + 1$$

2. (6 pistettä) Joukko $R = \{[0]_{10}, [2]_{10}, [4]_{10}, [6]_{10}, [8]_{10}\}$ on rengas jäännösluokkien tavallisen yhteen- ja kertolaskun suhteen.

   (a) Mikä on renkan ykkösalkio?

   (b) Mitä renkaan R alkiota vastaa kokonaisluku 4? Entä -2?

3. (12 pistettä) Ryhmällä S_4 on normaali aliryhmä $A = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia tekijäryhmässä S_4/A? Perustele väitteesi huolellisesti käyttäen tekijäryhmän kertolaskun määritelmää.

   (a) $(13)A \cdot (12)A = (134)A$

   (b) $((132)A)^{-1} = (13)A$

   (c) Joukko $\{A, (123)A, (124)A\}$ on ryhmän S_4/A aliryhmä.

4. (6 pistettä) Olkoon $G = \langle g \rangle$ syklinen ryhmä, jolla on normaali aliryhmä N. Osoita, että tekijäryhmä G/N on syklinen.

5. (12 pistettä) Tutkitaan kuvausta $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $f(a) = (-1)^a$.

   (a) Osoita, että f on ryhmähomomorfismi.

   (b) Määritä f:n ydin. Perustele vastauksesi huolellisesti.

   (c) Määritä isomorfismi $\bar{f}$, joka kuvauksesta f saadaan ryhmien homomorfialauseen avulla.

   (d) Kuvaus f ei ole injektio. Kuvaile lyhyesti omin sanoin, miksi kuvaus $\bar{f}$ on injektio. Voit halutessasi piirtää avuksi kuvan. Tarkkaa todistusta ei tarvita.

Algebra I
Helsingfors universitet, Institutionen för matematik och statistik
Kursförhör 2
7.5.2014

Räknare och tabller är inte tillåtna i provet.

1. (12 poäng) Vi granskar funktionen $f\colon 3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_7$, $f(a) = [a/3]_7$.
   (a) Visa att f är en homomorfism.
   (b) Nedan finns ett försök at befisa att kärnan till funktionen f är $21\mathbb{Z}$. Beviset är emellertid inte riktigt. Förklara kort vad som är fel och korrigera sedan beviset.
   "Antag att $a \in 21\mathbb{Z}$. Nu är $a = 21k$ för något $k \in \mathbb{Z}$. Vi ser att
   $$f(a) = f(21k) = [7k]_7 = [0]_7.$$
   Således $\operatorname{Ker} f = 21\mathbb{Z}$."
   (c) En hurudan isomorfism får man av homomorfismen f enligt homomorfismsatsen för grupper? Vilket element avbildas på elementet $[2]_7$ av isomorfismen if fråga?

2. (12 poäng) Vi vet om gruppen H att det är en undergrupp till $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ och att den har två element.
   (a) Hur många sidoklasser har H?
   (b) Rita en bild av mängden av sidoklasser $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)/H$. Välj själv det illustreringssätt du bäst tycker beskriver mängden.
   (c) Antag att en av H:s sidoklasser är $\{([1]_2, [1]_4), ([1]_2, [3]_4)\}$. Bestäm de övriga sidoklasserna.

3. (6 poäng) Vi granskar ringen $R = \{a, b, c, d\}$ som har följande räkneoperationstabeller:

$+$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	a	c
d	a	d	c	b

   (a) Vilken är ringens enhet (ykkösalkio)?
   (b) Är d ett enhetselement (yksikkö)?
   (c) Är R ett heltalsområde?

4. (6 poäng)
   (a) Vad är graden av polynomet $18X^7 + 13X^4 - 3X$ i ringen $\mathbb{Z}_6[X]$?
   (b) Låt R vara ringen i uppgift 3 och $P = X^2 - 3X + 2$ ett polynom i ringen $R[X]$. Bestäm rötterna till P.

5. (12 poäng)
   (a) Vad har kvotgrupper och normala undergruppen med varandra att göra?
   (b) Antag att G är en cyclisk grupp med en normal undergrupp N. Visa att kvotgruppen G/N är cyclisk.

Algebra I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
2. kurssikoe
7.5.2014

Kokeessa ei saa käyttää laskinta tai taulukkokirjaa.

1. (12 pistettä) Tutkitaan kuvausta $f\colon 3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_7$, $f(a) = [a/3]_7$.
   (a) Osoita, että f on homomorfismi.
   (b) Seuraavassa on yritetty osoittaa, että kuvauksen f ydin on $21\mathbb{Z}$. Todistus ei kuitenkaan ole pätevä. Selitä lyhyesti, mikä todistuksessa on vialla, ja korjaa sen jälkeen todistus.
   "Oletetaan, että $a \in 21\mathbb{Z}$. Nyt $a = 21k$ jollakin $k \in \mathbb{Z}$. Huomataan, että
   $$f(a) = f(21k) = [7k]_7 = [0]_7.$$
   Siten $\operatorname{Ker} f = 21\mathbb{Z}$."
   (c) Millainen isomorfismi homomorfismista f saadaan ryhmien homomorfialauseen avulla? Mikä alkio kuvautuu kyseisessä isomorfismissa alkiolle $[2]_7$?

2. (12 pistettä) Ryhmän $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ aliryhmästä H tiedetään, että siinä on kaksi alkiota.
   (a) Kuinka monta sivuluokkaa H:lla on?
   (b) Piirrä kuva sivuluokkien joukosta $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)/H$. Voit itse valita havainnollistustavan, joka kuvaa mielestäsi parhaalla tavalla joukon rakennetta.
   (c) Oletetaan, että eräs H:n sivuluokista on $\{([1]_2, [1]_4), ([1]_2, [3]_4)\}$. Määritä muut H:n sivuluokat.

3. (6 pistettä) Tutkitaan rengasta $R = \{a, b, c, d\}$, jolla on oheiset laskutoimitustaulut:

$+$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	a	c
d	a	d	c	b

   (a) Mikä on renkaan R ykkösalkio?
   (b) Onko alkio d yksikkö?
   (c) Onko R kokonaisalue?

4. (6 pistettä)
   (a) Mikä on renkaan $\mathbb{Z}_6[X]$ polynomin $18X^7 + 13X^4 - 3X$ aste?
   (b) Olkoon R tehtävässä 3 käsitelty rengas. Määritä renkaan $R[X]$ polynomin $X^2 - 3X + 2$ juuret.

5. (12 pistettä)
   (a) Miten tekijäryhmät ja normaalit aliryhmät liittyvät toisiinsa?
   (b) Oletetaan, että G on syklinen ryhmä, jolla on normaali aliryhmä N. Osoita, että tekijäryhmä G/N on syklinen.

Algebra I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
1. kurssikoe
26.2.2014

Koeaika on kolme tuntia. Kokeessa ei saa käyttää laskinta tai taulukkokirjaa.

1. (a) Mitkä seuraavista laskuista on laskettu oikein?

$$[3]_8 + [7]_8 = [5]_8 \qquad [-2]_4 + [3]_4 = [-7]_4 \qquad -[4]_5 = [6]_5$$

Perustele vastauksesi.

(b) Määritellään rationaalilukujen joukossa laskutoimitus $*$ ehdolla

$$a * b = a - 10 + b.$$

Osoita, että laskutoimituksella on neutraalialkio. Onko luvulla 2 käänteisalkiota laskutoimituksen $*$ suhteen?

2. (a) Miten määritellään ryhmäisomorfismi?

(b) Jos ryhmien välillä on isomorfismi, ryhmät ovat rakenteeltaan samanlaiset. Isomorfismin määritelmässä ei kuitenkaan suoranaisesti sanota mitään tällaista. Selitä lyhyesti omin sanoin, miksi isomorfismin määritelmästä seuraa, että isomorfisten ryhmien algebralliset ominaisuudet ovat samanlaiset.

(c) Ryhmällä $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ on aliryhmä $H = \{20^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Osoita isomorfisuuden määritelmän perusteella, että ryhmä $(\mathbb{Z}, +)$ on isomorfinen ryhmän $(H, \cdot)$ kanssa.

3. (a) Määritä ryhmän S_6 alkion $(425)(136)$ virittämä aliryhmä $\langle(425)(136)\rangle$. Mikä on alkion $(425)(136)$ kertaluku? Perustele vastauksesi huolellisesti.

(b) Anna esimerkki syklisestä ryhmästä, joka on ääretön. Mikä on keksimäsi ryhmän virittäjä?

4. (a) Olkoon G vaihdannainen ryhmä, jolla on aliryhmät H ja K. Osoita, että aliryhmien tulo $HK = \{hk \mid h \in H,\ k \in K\}$ on ryhmän G aliryhmä.

(b) Anna esimerkki ryhmästä G ja sen aliryhmistä H ja K, joiden tulo HK ei G:n ole aliryhmä.

Exam: Combinatorics Spring 2018

Date: 3.5.2018

Remember to write your name and student number on the answer sheet.

1. (20 points) How many pairs (X, Y) exists such that $X, Y \subseteq \{1, \ldots, n\}$ and X and Y are disjoint?

2. (20 points) Show that if $n+1$ distinct integers are chosen from the set $\{1, 2, \ldots, (k+1)n\}$ then there are always two which differ by at most k.

3. (20 points) Prove the following identity: For all non-negative integer n,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n.$$

Catalan?

4. (20 points) A circle with center o is the set of all points in the plane that are at a fix given distance, r, from o. Let $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ be $2n$ points on a line $\mathcal{L}$. In how many ways can n circles be drawn such that for every circle $\mathcal{O}$, there are $1 \leq i, j \leq 2n$ such that $x_i\bar{x}_j$ is a diameter of $\mathcal{O}$ and doesn't intersect with any of the other circles.

5. (20 points) We denote by S_n the set of permutations of $\{1, 2, \ldots, n\}$. How many permutations $\pi \in S_n$ exists such that $\pi(i) - \pi(i+1) \leq 1$ holds for all $1 \leq i < n$?

Stirling ↑

KOMBINATORIIKAN KURSSIN KOE

Arvostelu: 10p/tehtävä maksimissaan.
Kirjoita perustelut!

Onnea kokeeseen!

(1) Shakissa on 8×8-lauta. Toisella pelaajalla on mustat, toisella valkoiset nappulat, molemmilla on yksi kuningas, yksi kuningatar, kaksi lähettiä, kaksi hevosta, kaksi tornia ja kahdeksan sotilasta. Kuinka monella taalla nappulat voivat olla laudalla, kun yhdessä ruudussa voi olla korkeintaan yksi nappula? Säännöistä ei välitetä. Samanlaiset, samanväriset nappulat samaistetaan, (esimerkiksi kaikki mustat sotilaat samaistetaan,) eli niiden vaihto päittäin ei vaikuta. Numeerista arvoa ei tarvita, vaan lauseke riittää.

(2) Kuinka moni lukua 400 pienempi positiivinen kokonaisluku on jaollinen joko kahdella tai seitsemällä, mutta ei viidellä?

(3) Miten monella tavalla voidaan järjestää sanan KURSSIKOE kirjaimet muodostaen eri sanoja, jos vaaditaan, että mitkään kaksi samaa kirjainta eivät saa olla peräkkäin?

(4) Anna kaava (joka ei ole rekursiivinen) rekursiivisen jonon $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-1}$ $(n \geq 2)$ termille a_n, kun vaaditaan, että $a_0 = 0$. (Huomaa, että tässä todellakin on vain yksi alkuehto!)

(5) Anna kaava (joka ei ole rekursiivinen) rekursiivisen jonon $a_n = 6a_{n-1} - 5a_{n-2} + 2$ $(n \geq 2)$ termille a_n, kun $a_0 = 0$ ja $a_1 = 1$.

(6) Huoneessa on 17 ihmistä. Nämä tervehtivät toisiaan seuraavasti: Osa mahdollisesti kättelee, osa mahdollisesti kumartaa toisilleen, ja osa mahdollisesti jättää tervehtimättä. Tervehdys, kuten myös sen tekemättä jättäminen on kaksipuoleista: joko kaksi henkilöä tervehtii toisiaan samoin (eli molemmat kättelevät tai molemmat kumartavat) tai jättää tervehtimättä. Ketkään kaksi eivät myöskään tervehdi toisiaan yli yhtä kertaa. Osoita, että huoneesta löytyy kolmen hengen joukko, niin, että kaikki joukon jäsenet ovat tervehtineet toisiaan samoin tai jättäneet tervehtimättä.

Hyvää kesää!

Verkot, syksy 2015
Matematiikan- ja tilastotieteen laitos
Kurssikoe 21.12.2015.

Tämä on kahden tunnin kurssikoe

HUOM Koeaika 2 tuntia!

Valitse alla olevista tehtävistä 5 oman maun mukaan.
Muista perustella vastauksesi!

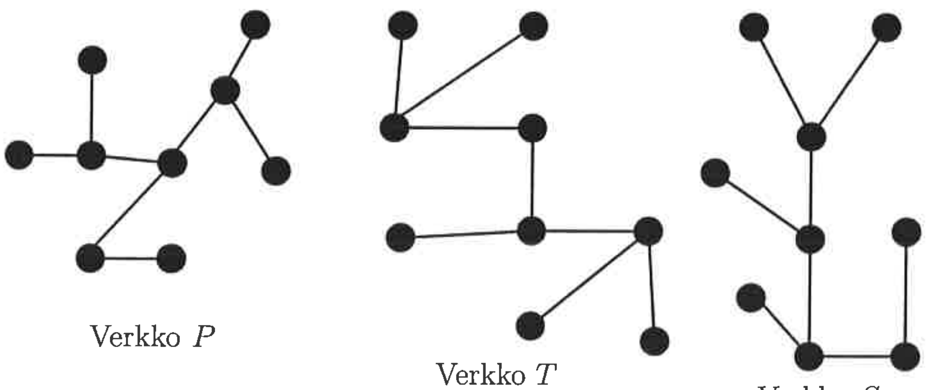
1. Olkoon G suhteikko, jonka solmujoukko on $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ ja jonka solmujen seuraajaluettelot ovat

$$a : b; \ b : d; \ c : b, e; \ d : a, c;$$

$$e : e; \ f : e, g; \ g : f.$$

a) Piirrä kaavio suhteikosta G ja tutki onko G yhtenäinen. Perustele vastauksesi!
b) Määritä suhteikon G vahvasti yhtenäiset komponentit. Perustele vastauksesi!

2. Tarkastellaan kuvassa 1 alla esitettyä verkkoja P, T, S.

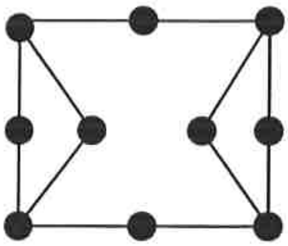


Verkko P Verkko T Verkko S

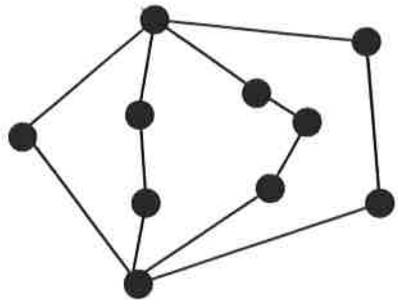
Kuva 1

a) Osoita tarkasti, että verkot P, T, S ovat kaikki puita.
b) Tutki ovatko mitkään kaksi verkoista P, T, S isomorfisia keskenään. Perustele vastauksesi!

3. Tarkastellaan kuvassa 2 (alla) esitettyjä verkkoja G, H.



Verkko G



Verkko H

Kuva 2

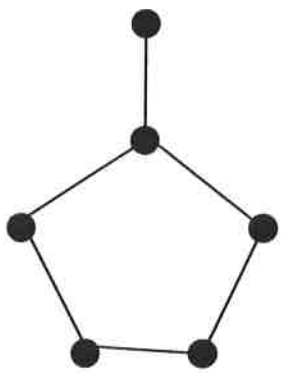
a) Tutki kummankin verkon kohdalla onko se kaksijakoinen.
b) Tutki kummankin verkon kohdalla onko siinä Hamiltonin ja/tai Eulerin kierrosta.

4. Kuinka monta isomorfiaa vaille oleellisesti erilaista verkkoa, jossa on 7 pistettä ja tasan 18 viivaa on olemassa? Piirrä kuva jokaisesta mallista.

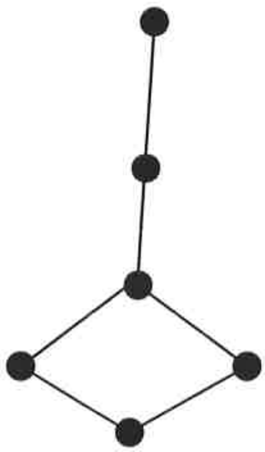
5. a) Piirrä täydellinen verkko K_4 ja keksi sille joku virittävä puu T.
   b) Määritä verkon K_4 perusrenkaat a)-kohdassa konstruoimasi puun T suhteen.
   c) Kuinka monta renkaistoa verkolla K_4 on?

6. Osoita, että täydellisellä verkolla K_4 ei ole erillisiä renkaita. Päättele tämän avulla, että verkolla K_4 on tasan 7 erilaista rengasta.

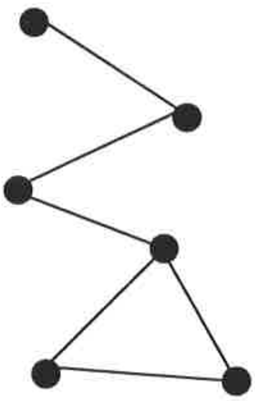
7. Takastellaan seuraavia verkkoja A, B, C.



Verkko A



Verkko B



Verkko C

a) Osoita *tarkasti* kurssin tietojen avulla, että jokaisella verkoista A, B, C on tasan yksi rengas. (Vihje: tarkastele pisteiden ja viivojen lukumääriä).
b) Osoita *a-kohdan avulla*, että verkoista A, B, C mitkään kaksi eivät ole isomorfisia keskenään.

University of Helsinki
Bachelor's programme in mathematical sciences
MAT21030 Elements of set theory I
Course exam
4.3.2024

No calculators, charts or other extra material allowed.

Leave a few empty rows for grading notes at the top of the first page of your answer sheet.

1. (a) Simplify $(\bigcup A)\cap(\bigcup B)$, where $A = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ and $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}\}$.

   (b) Prove or disprove (i.e., provide a proof or a counter example): For any sets A and B

$$\mathcal{P}A \cup \mathcal{P}B = \mathcal{P}(A \cup B)$$

2. Show that every natural number is a transitive set.

3. Show that addition of reals is commutative, i.e,

$$x +_{\mathbb{R}} y = y +_{\mathbb{R}} x$$

   for all $x, y \in \mathbb{R}$. State without proof the results from earlier levels of the construction that you use in your proof.

4. Show that for any $n \in \omega$, any proper subset of n is equinumerous to some m less than n. (Hint: induction)

University of Helsinki
Bachelor's programme in mathematical sciences
MAT21031 Elements of set theory II
Course exam
7.5.2024

No calculators, charts or other extra material allowed.

Leave a few empty rows for grading notes at the top of the first page of your answer sheet.

1. Show directly from the definitions of *cardinal arithmetic* that
$$(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu.$$

2. Prove that the following forms of the Axiom of Choice are equivalent:
   (i) For any sets C and D, $C \preccurlyeq D$ or $D \preccurlyeq C$ (or both).
   (ii) For any set A there is a well-ordering $<$ of A.

3. In *ordinal arithmetic*, simplify the following:
   (a) $\omega + 2 \cdot \omega^3$,
   (b) $\omega^2 \cdot \omega^\alpha$,
   (c) $\bigcup\{\alpha^\delta : \delta < \omega_1\} + \omega_1$.

4. Show that for any sets a, b,
   (a) $\operatorname{rank}\{a, b\} = \max(\operatorname{rank} a, \operatorname{rank} b)^+$,
   (b) $\operatorname{rank} \bigcup a \in \operatorname{rank} a$.

University of Helsinki
Department of Mathematics and Statistics
Introduction to Logic 1
Course Examination
March 7, 2017

1. Use resolution to derive p_2 from propositional formulas p_0, $(p_0 \to p_1)$, and $(p_0 \to p_1) \to (p_1 \to p_2)$.

2. Use natural deduction to derive $\neg A$ from $\neg(A \wedge B)$ and $A \to B$.

3. Give a semantic proof of

$$(A \wedge C) \to (A \wedge (C \vee B)).$$

4. (a) Explain what is meant by soundness of natural deduction.
   (b) Show that the propositional formula $\neg(A \vee B)$ is not derivable from the propositional formulas $A \to B$ and $\neg(A \wedge B)$.

5. (a) Explain what is meant by saying that a propositional formula is a contingency.
   (b) Is the propositional formula $(p_0 \to p_1) \to (p_1 \to p_2)$ a contingency?

Notes, tables, or calculators are not allowed in the exam.

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus logiikkaan 1
Kurssikoe
11.3.2016

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja.

1. Onko propositiolause $(p_2 \wedge p_0) \to p_1$ propositiolauseen $p_2 \wedge (p_0 \to p_1)$ looginen seuraus vai ei? Perustele tarkasti.

2. Osoita resoluutiolla, että seuraava kokoelma klausuuleja on ristiriitainen:

$$\{\{p_0, p_1, \neg p_2\}, \{p_0, \neg p_1, p_2\}, \{\neg p_0, p_1\}, \{p_1, p_2\}, \{\neg p_0, p_2\}, \{\neg p_1, \neg p_2\}\}.$$

3. Päättele luonnollisella päättelyllä lause $B \to \neg(A \vee C)$ lauseista $A \to \neg B$ ja $C \to \neg B$.

4. Osoita, ettei luonnollisella päättelyllä voida päätellä lausetta $p_0 \to p_1$ lauseesta $p_0 \to (p_1 \vee p_2)$.

5. Anna semanttinen todistus lauseelle

$$((A \vee \neg B) \to C) \to ((A \to C) \wedge (\neg C \to B)).$$

Helsingfors universitet
Institutionen för matematik och statistik
Logik I
Kursförhör 2
8.5.2015

1. Låt $L = \{P_0, R_0\}$ och låt $\mathcal{M} = (M, P_0^{\mathcal{M}}, R_0^{\mathcal{M}})$ vara en L-struktur där $M = \{0,1,2,3,4,5,6\}$, $P_0^{\mathcal{M}} = \{0,2,4,6\}$ och $R_0^{\mathcal{M}} = \{(0,1),(2,3),(4,5)\}$. Visa utgående från Tarskis sanningsdefinition att

$$\mathcal{M} \models \neg\exists x(P_0(x) \wedge \exists y R_0(y,x)).$$

2. Härled med naturlig deduktion satsen

$$\forall x P_0(x) \to \exists y P_1(y)$$

från satsen $\exists y \forall x(P_0(x) \to P_1(y))$.

3. Ge ett semantiskt bevis för

$$\neg\forall x \exists y R(x,y) \to \exists x \forall y \neg R(x,y).$$

4. Låt lexikonet vara $L = \{R_0, c_0\}$ och låt $\mathcal{M}$ och $\mathcal{M}'$ vara två L-strukturer vars universum är $\mathrm{dom}(\mathcal{M}) = \mathrm{dom}(\mathcal{M}') = \{1,2,3,4,5,6\}$ och där

$$R_0^{\mathcal{M}} = \{(1,2),(4,3),(5,6)\} \quad \text{och} \quad R_0^{\mathcal{M}'} = \{(3,2),(5,4),(1,6)\}$$

samt

$$c_0^{\mathcal{M}} = c_0^{\mathcal{M}'} = 3.$$

Är $\mathcal{M}$ och $\mathcal{M}'$ isomorfa? Motivera.

Helsingfors universitet
Institutionen för matematik och statistik
Logik I
Kursförhör 2
8.5.2015

1. Låt $L = \{P_0, R_0\}$ och låt $\mathcal{M} = (M, P_0^{\mathcal{M}}, R_0^{\mathcal{M}})$ vara en L-struktur där $M = \{0,1,2,3,4,5,6\}$, $P_0^{\mathcal{M}} = \{0,2,4,6\}$ och $R_0^{\mathcal{M}} = \{(0,1),(2,3),(4,5)\}$. Visa utgående från Tarskis sanningsdefinition att

$$\mathcal{M} \models \neg\exists x(P_0(x) \wedge \exists y R_0(y,x)).$$

2. Härled med naturlig deduktion satsen

$$\forall x P_0(x) \to \exists y P_1(y)$$

från satsen $\exists y \forall x(P_0(x) \to P_1(y))$.

3. Ge ett semantiskt bevis för

$$\neg\forall x\exists y R(x,y) \to \exists x\forall y \neg R(x,y).$$

4. Låt lexikonet vara $L = \{R_0, c_0\}$ och låt $\mathcal{M}$ och $\mathcal{M}'$ vara två L-strukturer vars universum är $\mathrm{dom}(\mathcal{M}) = \mathrm{dom}(\mathcal{M}') = \{1,2,3,4,5,6\}$ och där

$$R_0^{\mathcal{M}} = \{(1,2),(4,3),(5,6)\} \quad \text{och} \quad R_0^{\mathcal{M}'} = \{(3,2),(5,4),(1,6)\}$$

2 12 30 6 20 6

samt

$$c_0^{\mathcal{M}} = c_0^{\mathcal{M}'} = 3.$$

Är $\mathcal{M}$ och $\mathcal{M}'$ isomorfa? Motivera.

Helsingfors universitet
Institutionen för matematik och statistik
Logik I
Kursförhör 1
6.3.2015

1. Ge en satslogisk formel i disjunktiv normalform som är satslogiskt ekvivalent med formeln $((p_0 \vee p_1) \rightarrow \neg p_2) \wedge (\neg(p_2 \rightarrow p_1) \vee \neg p_0)$.

2. Härled med naturlig deduktion den satslogiska formeln $B \rightarrow C$ från formlerna $A \vee C$ och $A \rightarrow \neg B$.

3. Ge ett semantiskt bevis för den satslogiska formeln

$$((A \wedge B) \vee C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \vee C).$$

4. Bevisa att det inte går att härleda den satslogiska formeln $p_0 \wedge \neg p_1$ från formeln $p_1 \rightarrow (p_0 \leftrightarrow \neg p_1)$ med naturlig deduktion.

Helsingfors universitet
Institutionen för matematik och statistik
Logik 1
Kursförhör 2, 2.5.2014

1. Härled med naturlig deduktion satsen

$$\neg\forall x_0\forall x_1 R_0(x_0, x_1)$$

   från satsen $\forall x_0\exists x_1\neg R_0(x_0, x_1)$.

2. Ge ett semantiskt bevis för satsen

$$\forall x_0\forall x_1 R_0(x_0, x_1) \to \forall x_0 R_0(F(x_0), x_0).$$

3. Låt $L = \{R_0\}$ och $\mathcal{M} = (M, R_0^{\mathcal{M}})$, där $M = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ och $R_0^{\mathcal{M}} = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 : n = 2m\}$. Visa utgående direkt från Tarskis sanningsdefinition att

$$\mathcal{M} \models \neg\exists x_0\forall x_1 R_0(x_0, x_1).$$

4. Låt $L = \{R_0, c\}$, där R_0 är en tvåställig relationssymbol och c är en konstantsymbol. Låt $\mathcal{M}_1 = (\mathbb{Z}, <, 0)$ och $\mathcal{M}_2 = (\mathbb{Z}, <, 1)$ (dvs. $\mathrm{dom}(\mathcal{M}_1) = \mathrm{dom}(\mathcal{M}_2) = \mathbb{Z}$, $R_0^{\mathcal{M}_1} = R_0^{\mathcal{M}_2} = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a < b\}$, $c^{\mathcal{M}_1} = 0$ och $c^{\mathcal{M}_2} = 1$). Är $\mathcal{M}_1$ och $\mathcal{M}_2$ isomorfa? Motivera noggrant.

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Logiikka 1
2. Kurssikoe 2.5.2014

1. Anna luonnollinen päättely lauseelle

$$\neg\forall x_0\forall x_1 R_0(x_0, x_1)$$

lauseesta $\forall x_0\exists x_1\neg R_0(x_0, x_1)$.

2. Anna semanttinen todistus lauseelle

$$\forall x_0\forall x_1 R_0(x_0, x_1) \to \forall x_0 R_0(F(x_0), x_0).$$

3. Olkoon $L = \{R_0\}$ ja $\mathcal{M} = (M, R_0^{\mathcal{M}})$, missä $M = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ja $R_0^{\mathcal{M}} = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 : n = 2m\}$. Osoita suoraan Tarksin totuusmääritelmään nojautuen, että

$$\mathcal{M} \models \neg\exists x_0\forall x_1 R_0(x_0, x_1).$$

4. Olkoon $L = \{R_0, c\}$, missä R_0 on kaksipaikkainen relaatiosymboli ja c on vakiosymboli. Olkoot $\mathcal{M}_1 = (\mathbb{Z}, <, 0)$ ja $\mathcal{M}_2 = (\mathbb{Z}, <, 1)$ (eli $\mathrm{dom}(\mathcal{M}_1) = \mathrm{dom}(\mathcal{M}_2) = \mathbb{Z}$, $R_0^{\mathcal{M}_1} = R_0^{\mathcal{M}_2} = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a < b\}$, $c^{\mathcal{M}_1} = 0$ ja $c^{\mathcal{M}_2} = 1$). Ovatko $\mathcal{M}_1$ ja $\mathcal{M}_2$ isomorfiset? Perustele tarkasti.

Helsingfors universitet
Institutionen för matematik och statistik
Logik 1
Kursförhör 1, 28.2.2014

1. Är den satslogiska formeln
$$((p_0 \vee p_1) \to \neg p_2) \wedge (\neg(p_2 \to p_1) \wedge \neg p_0)$$
tautolog, kontradiktorisk eller kontingent?

2. Härled formeln $(A \vee B) \to C$ från formeln $(A \to C) \wedge (B \to C)$ med naturlig deduktion.

3. Ge ett semantiskt bevis för formeln
$$(\neg A \wedge \neg B) \to (\neg(A \vee B)).$$

4. Går det att härleda formeln
$$(p_0 \vee p_1) \to p_2$$
från formeln
$$(p_0 \to p_2) \vee (p_1 \to p_2)$$
med naturlig deduktion? Motivera.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Logiikka I

Loppukoe/Huuskonen

9.8.2007

1. Tutki totuustaulun avulla, onko propositiolause $(p_0 \to p_1) \to p_1$ propositiolauseen p_0 kanssa loogisesti ekvivalentti.

2. Osoita semanttisen puun avulla, että propositiolauseet $(p_0 \to p_1) \to p_0$ ja p_0 ovat loogisesti ekvivalentit.

3. Esitä formaali todistus (ns. "luonnollinen päättely") seuraavalle:

$$\{\forall x_1(\neg P_0(x_1) \to P_0(x_1))\} \vdash P_0(c_0)$$

(Vihje: Tilapäisestä oletuksesta $\neg P_0(c_0)$ voi johtaa ristiriidan.)

4. Todista seuraava väite formaalin todistuksen ("luonnollisen päättelyn") olemassaolemattomuudesta.

$$\{\forall x_0(P_0(x_0) \vee P_1(x_0))\} \nvdash \forall x_0 P_0(x_0) \vee \forall x_0 P_1(x_0)$$

Perustele soveltamalla eheyslausetta asianmukaisesti.

5. Osoita, että seuraava pallomallien ominaisuus ei ole määriteltävä predikaattilogiikassa:

Mallin alkioiden lukumäärä on jaollinen luvulla 13.

(Oppikirjassa todistettuja väitteitä saa käyttää vapaasti hyväksi.)

Matematiikan ja tilastotieteen osasto
Helsingin yliopisto

Kokeessa saa olla mukana vain kynät, kumi ja viivoitin.
Elektroniset laitteet ja taulukkokirja eivät ole sallittuja.

VEKTORIANALYYSI I
21.10.2019

0.1. **Tehtävä.** Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{kun } (x,y) \neq 0\,, \\ 0, & \text{kun } (x,y) = 0\,. \end{cases}$$

Etsi funktion f suuntaisderivaatat origossa $\partial_a f(0,0)$ jokaiseen suuntaan $a = (a_1, a_2)$, kun $||a|| = 1$. Osoita, että f ei ole jatkuva origossa.

0.2. **Tehtävä.** (1) Etsi osittaisderivaatta $\partial f / \partial x$, kun

$$(a) \quad f(x,y) = x^3 y + e^{xy^2}\,, \qquad (b) \quad f(x,y) = x \sin\left(\frac{x}{1+y^2}\right).$$

(2) Tutki, onko funktiolla

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1 x_2$$

lokaaleja ääriarvopisteitä. Jos niitä on, niin etsi lokaalit ääriarvot.

0.3. **Tehtävä.** Osoita, että kuvaus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + \sin(x_2) + x_3^2, \cos(x_1) + x_3^3, x_1 x_2 x_3)$$

on differentioituva.
Etsi (vektori)osittaisderivaatta $\partial_1 f$.
Määrää kuvauksen f Jacobin matriisi.

0.4. **Tehtävä.** Olkoon
(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x_1, x_1 x_2, x_2)$
(2) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, g(x) = ||x||^2$
(3) $h := gf : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\,.$

Osoita, että h on differentioituva. Etsi derivaatta $Dh(x_0)$ pisteessä $x_0 = (1, -1)$.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

Kokeessa saa olla mukana vain kynät, kumi ja viivoitin.
Elektroniset laitteet ja taulukkokirja eivät ole sallittuja.
Tenttiaika on 3 tuntia 30 minuuttia.

VEKTORIANALYYSI I
11.4.2018

0.1. **Tehtävä.** Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4}, \qquad \text{kun } (x_1, x_2) \neq (0,0)\,,$$
$$f(0,0) = 0\,.$$

Etsi funktion f suuntaisderivaatat (eli suunnatut derivaatat) origossa. Osoita, että f ei ole jatkuva origossa.

0.2. **Tehtävä.** Olkoon $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineaarikuvaus. Osoita, että $\partial_e A(x_0) = Ae$ kaikilla $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ja $||e|| = 1$.

0.3. **Tehtävä.** Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ||x||^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$, $n \geq 2$. Etsi funktion f osittaisderivaatat pisteessä x ja funktion f gradientti pisteessä x.
Perustele, miksi funktio f on differentioituva. Mikä on funktion f derivaatta pisteessä x?

0.4. **Tehtävä.** Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Etsi funktion f gradientti. Piirrä tasa-arvokäyrä, joka kulkee origon kautta, ja piirrä gradienttivektori pisteessä $(-1, 1)$.

0.5. **Tehtävä.** Tutki, onko funktiolla $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1^4 - x_2^4$, lokaaleja ääriarvopisteitä.

Date: 20180406/RHS.

Helsingin yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen osasto
Vektorianalyysi II (MAT21020), syksy 2018
Kurssitentti, Ma 17.12.2018
Tentaattori: Ville Tengvall (ville.tengvall@helsinki.fi)

Vastaa kaikkiin kysymyksiin (kokeessa ei saa käyttää laskinta)

1. Tarkastellaan reaaliarvoista funktiota $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 4x_1^2 - 8x_1x_2 + 4x_2^2 + x_3 - x_1x_3\,.$$

(a) Määritä funktion f gradientti $\nabla f(x)$ pisteessä $x \in \mathbb{R}^3$. **(1p)**

(b) Määritä funktion f kriittiset pisteet koko avaruudessa $\mathbb{R}^3$. **(2p)**

(c) Määritä funktion f Hessen matriisi $\mathrm{Hes}_f(x)$ pisteessä $x \in \mathbb{R}^3$. **(1p)**

(d) Määritä kohdassa (b) löytämiesi kriittisten pisteiden laatu. **(2p)**

2. Tarkastellaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ osajoukkoa

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1,\, x_3 > 0\}\,.$$

(a) Osoita, että joukko S on avaruuden $\mathbb{R}^3$ sileä, kaksiulotteinen graafipinta. **(2p)**

(b) Määritä pinnan S tangenttitaso $\mathcal{T}_a$ pisteessä $a = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. **(1.5p)**

(c) Määritä pinnan S normaalisuora $\mathcal{N}_a$ pisteessä $a = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. **(1.5p)**

(d) Hahmottele joukot S, $\mathcal{T}_a$ ja $\mathcal{N}_a$ kuvan avulla. **(1p)**

3. Olkoot

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t-1, t)$$

ja

$$\eta : [0, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}^2, \quad \eta(t) = (t, 1-t^2)$$

polkuja.

(a) Määrittele polkujen γ ja η yhdistetty polku $\gamma \vee \eta$. **(2p)**

(b) Piirrä kuva polun $\gamma \vee \eta$ jäljestä. **(1p)**

(c) Laske funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = |x_1|$$

käyräintegraali polun $\gamma \vee \eta$ suhteen. **(3p)**

4. Tarkastellaan yhtälöparia

$$\begin{cases} \sin(x+y) + \cos u = 1 \\ \sin(y+u) + \cos v = 1. \end{cases}$$

(a) Osoita, että kyseisellä yhtälöparilla on pisteen $a = (0,0,0,0)$ ympäristössä muotoa

$$(x, y) = g(u, v)$$

oleva jatkuvasti differentioituva ratkaisu. **(4p)**

(b) Määritä (a)-kohdan kuvaukselle g lineaarikuvauksen $Dg(0,0)$ matriisi. **(2p)**

Vektorianalyysi II

Yleistentti (kokeen kesto 3h 30min), 24.05.2017
Taulokkokirjat ja laskimet eivät ole kokeessa sallittuja.

1. Määritä funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{2}z + xe^y + ye^x - x - y, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

kriittiset pisteet ja niiden laatu.

2. (a) Kerro Implisiittifunktiolauseen väite.

   (b) Määritä avaruuden $\mathbb{R}^3$ pinnan $x^2 + 2xy + y^2 + z^4 = 1$ pisteeseen $(2,-2,1)$ piirretyn tangenttitason yhtälö.

3. (a) Kerro, mitä tarkoittaa jos sanotaan, että kuvaus f on lokaali diffeomorfismi pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

   (b) Onko kuvaus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x+z, e^{x+y}, e^{x-z})$, lokaali diffemorfismi pisteessä $(0,0,0)$?

4. Olkoon $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_3)$ ja $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t^3)$. Määritä

$$\int_\gamma F \cdot d\bar{s}.$$

5. Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2,x_3) = x_2 + x_3$, ja $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (0, 2t^2, t^2)$. Laske integraali

$$\int_\gamma f \, ds.$$

Vektorianalyysi II

Kurssikoe (kokeen kesto 2h 30min), 19.12.2016
Taulokkokirjat ja laskimet eivät ole kokeessa sallittuja.

Kokeessa on **kolme** tehtävää, joista jokaisesta saa maksimissaan 16 pistettä.

1. (a) (6 pistettä) Selitä omin sanoin, miten kolmesti jatkuvasti derivoituvan funktion f toisen kertaluvun Taylor-kehitelmä ja Hessen matriisi $D^2 f = (\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)_{i,j=1}^n$ liittyvät toisiinsa.

   (b) (10 pistettä) Määritä funktion

$$f(x,y) = e^{x^2-4xy+y^2-6y}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

   kriittiset pisteet ja niiden laatu.

2. (a) (6 pistettä) Kerro Implisiittifunktiolauseen väite.

   (b) (10 pistettä) Määritä avaruuden $\mathbb{R}^3$ pinnan $xe^y + ye^x + e^z = 0$ pisteeseen $(-1,0,0)$ piirretyn tangenttitason yhtälö.

3. (a) (10 pistettä) Olkoon $F(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)$ tason vektorikenttä, ja $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, positiivisesti suunnistettu yksikköympyrän kehä. Laske integraali

$$\int_\gamma F \cdot d\overline{s}.$$

   (b) (6 pistettä) Kerro luennoilla käsitellyn Greenin kaavan väittämä.

VEKTORANALYS
2. kursprovet
15.12.2014 kl 13-15

1. Bestäm konstanten $A \in \mathbb{R}$ så att vektorfältet $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x, y) = (2x + ye^x, 2Ae^x)$$

blir exakt. Bestäm potentialen till vektorfältet F för detta värde på konstanten A.

2. Låt D vara delmängden $B(0,4) \setminus \bar{B}(0,2)$ i planet, där $B(0,\rho)$ är cirkelskivan med radien ρ och origo som mittpunkt. (Förtydligande: "\" avser komplementmängden.) Beräkna integralen

$$\int_D (x_1^2 + x_2^2)(3 + x_1)\, dx_1 dx_2.$$

(Tips: polära koordinater.)

3. Låt $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara vektorfältet $H(x, y) = (x^2y^2, y \cos x)$. Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\partial D} H \cdot d\bar{s},$$

av vektorfältet H med hjälp av Greens formel, då $D =]0, \pi[\times]0, 1[\subset \mathbb{R}^2$.

4. Låt $Q \subset \mathbb{R}^3$ vara ytan

$$Q := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, z = x^2, \; 0 \le x \le 1, \; 0 \le y \le 2\}.$$

Integrera funktionen $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x, y, z) = \sqrt{1 + 4x^2}$, över ytan Q, dvs. beräkna $\iint_Q g \, dS$.

VEKTORANALYS 2014
1. KURSPROVET
20.10.2014

1. Är det möjligt att definiera funktionens $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}$ värde $f(0,0)$ så att funktionen blir kontinuerlig i hela planet, då

$$f(x,y) := \frac{y^3 + x^2}{4x^2 + y^2}.$$

2. Vilka är funktionens $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2,$$

största och minsta värden på randen av enhetskulan? (Tips. Du kan exempelvis tillämpa metoden med Lagranges multiplikatorer i mängden $A_0 = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 - 1 = 0\}$.)

3. Definiera funktionerna $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ och $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ genom

$$h(x,y) := \left(e^{x+y}, e^{x-y}\right) \quad , \quad g(x,y) = (x^2 + y, -3x).$$

Beräkna derivatorna $h'(x,y)$ och $g'(x,y)$ i en godtycklig punkt (x,y) i planet. Ange formeln för den sammansatta funktionen $g \circ h$. Beräkna derivatan av funktionen $g \circ h$ i punkten $(1,1)$.

4. Bestäm de lokala extremvärdespunkterna för följande funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$f(x,y) := x^3 - 9x + 4y^2.$$

MAT21005 Topologia IA
Kurssikoe 5.3.2020
Kesto: 2 t 30 min

Huom.: kurssikokeessa saa olla mukana A4-kokoinen yksipuoleinen käsinkirjoitettu muistilappu!

1. Olkoon $X = (0, \infty)$ ja asetetaan

$$d(s,t) = \left|\frac{1}{s} - \frac{1}{t}\right|, \quad s,t \in (0,\infty).$$

(i) Näytä, että d on metriikka joukossa X.
(ii) Määritä joukon $A = [1, \infty)$ läpimitta $d(A)$ avaruudessa (X, d).

2. (*teoriatehtävä*) Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Osoita:
(i) jos V_j on avaruuden X avoin joukko jokaisella $j \in J$, niin yhdiste

$$\bigcup_{j \in J} V_j$$

on avoin joukko,
(ii) jos V_1 ja V_2 ovat avaruuden X avoimia joukkoja, niin leikkaus $V_1 \cap V_2$ on avoin joukko.

3. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuvia kuvauksia. Määritellään kuvaus $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ehdolla

$$h(x,y) = (f(x), g(y)), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Näytä, että h on jatkuva kuvaus tason $\mathbb{R}^2$ euklidisen metriikan $|\cdot|_2$ suhteen.

4. Tarkastellaan euklidista avaruutta $(\mathbf{R}^3, |\cdot|_2)$ ja joukkoa

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x + y \leq z\}.$$

(i) Näytä, että A on suljettu joukko.
(ii) Tutki, onko piste $(0,0,1)$ joukon A sisäpiste.
(iii) Tutki, onko piste $(0,0,0)$ joukon A reunapiste.

Perustele tarkasti! Ns. alkukuvaehdosta saattaa olla hyötyä.

HY / Matematiikan ja tilastotieteen osasto
Topologia Ia
Kurssikoe 7.3.2019
Sallitut apuvälineet: Ei apuvälineitä.

Näissä tehtävissä euklidisella avaruudella $\mathbb{R}^n$ tarkoitetaan metristä avaruutta $(\mathbb{R}^n, d)$, missä $n \in \mathbb{N}$ ja d on euklidinen metriikka

$$d((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2)^{1/2}$$

kaikilla $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

t1. (6p.) Olkoon $t \in]0, 1[$ ja olkoon $\|\cdot\|_t \colon \mathbb{R}^2 \to [0, \infty[$ funktio, joka on määritely kaavalla

$$\|(x, y)\| = t|x| + (1 - t)|y|$$

kaikilla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Osoita, että $\|\cdot\|_t$ on normi vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^2$.

t2. (6p.) Olkoon $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 < 2,\ -1 < x < 1\}$. Osoita, että A on euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^3$ avoin joukko.

t3. (6p.) Olkoon $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1,\ x \neq 0\}$. Määritä joukon A sulkeuma $\overline{A}$ euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^2$. Perustele vastauksesi.

t4. (6p.) Olkoon $\mathrm{raj}([-1, 1], \mathbb{R}) = \{f \colon [-1, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ on rajoitettu}\}$. Pidetään tunnettuna, että $\mathrm{raj}([-1, 1], \mathbb{R})$ on vektoriavaruus ja että funktio $\|\cdot\| \colon \mathrm{raj}([-1, 1], \mathbb{R}) \to [0, \infty[$, joka on määritelty kaavalla $\|f\| = \sup_{x \in [-1,1]} |f(x)|$ kaikilla $f \in \mathrm{raj}([-1, 1], \mathbb{R})$, on normi vektoriavaruudessa $\mathrm{raj}([-1, 1], \mathbb{R})$. Olkoon d normin $\|\cdot\|$ määräämä metriikka avaruudessa $\mathrm{raj}([-1, 1], \mathbb{R})$. Osoita, että funktio $\Phi \colon \mathrm{raj}([-1, 1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, joka on määritelty kaavalla

$$\Phi(f) = \inf_{x \in [-1,1]} f(x)$$

kaikilla $f \in \mathrm{raj}([-1, 1], \mathbb{R})$, on jatkuva metrisestä avaruudesta $(\mathrm{raj}([-1, 1], \mathbb{R}), d)$ euklidiseen avaruuteen $\mathbb{R}$.

MAT21005 Topologi IA
Kursprov 26.10.2018
Tid: 2 t 30 min

1.(i) Låt (X, d) vara ett metriskt rum. Definiera begreppen *öppen* mängd $A \subset X$ och *sluten* mängd $B \subset X$.
(ii) Motivera på basen av definitionen varför mängden

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$$

är varken öppen eller sluten i $\mathbb{R}^2$ försedd med det euklidiska avståndet.

2. Låt (X, d) vara ett metriskt rum. Visa att d' är en metrik i X, då

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in X.$$

Tips: kunskapen att funktionen $s \mapsto \frac{s}{1+s}$ är växande i $[0, \infty)$ kan vara nyttig.

3. Visa att mängden

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y < z\}$$

är öppen i $\mathbb{R}^3$ försedd med det euklidiska avståndet.

4. Låt $f : X \to Y$ vara en avbildning, där X och Y är metriska rum. Visa att f är kontinuerlig $X \to Y$ om och endast om följande villkor gäller: det slutna höljet

$$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$$

för varje mängd $B \subset Y$. *Tips:* urbildskriteriet för kontinuitet med slutna mängder kan användas.

KÄÄNNÄ!

MAT21005 Topologi IA
Kurssikoe 26.10.2018
Kesto: 2 t 30 min

1.(i) Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Määrittele käsitteet *avoin* joukko $A \subset X$ ja *suljettu* joukko $B \subset X$.
(ii) Perustele määritelmän nojalla miksi joukko

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$$

ei ole avoin eikä suljettu avaruudessa $\mathbb{R}^2$ varustettuna euklidisella metriikalla.

2. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Näytä, että d' on metriikka avaruudessa X, kun

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in X.$$

Vihje: tieto, että funktio $s \mapsto \frac{s}{1+s}$ on kasvava joukossa $[0, \infty)$ saattaa olla hyödyllinen.

3. Näytä, että joukko

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y < z\}$$

on avoin avaruudessa $\mathbb{R}^3$ varustettuna euklidisella metriikalla.

4. Olkoon $f : X \to Y$ kuvaus, missä X ja Y ovat metrisiä avaruuksia. Näytä, että f on jatkuva $X \to Y$ jos ja vain jos seuraava ehto on voimassa: sulkeuma

$$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$$

jokaiselle joukolle $B \subset Y$. *Vihje:* jatkuvuuden alkukuvaehto suljettujen joukkojen avulla on hyödyllinen.

VÄND!

MAT21005 Topologi IA
Kursprov 26.10.2018
Tid: 2 t 30 min

1.(i) Låt (X, d) vara ett metriskt rum. Definiera begreppen *öppen* mängd $A \subset X$ och *sluten* mängd $B \subset X$.
(ii) Motivera på basen av definitionen varför mängden

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$$

är varken öppen eller sluten i $\mathbb{R}^2$ försedd med det euklidiska avståndet.

2. Låt (X, d) vara ett metriskt rum. Visa att d' är en metrik i X, då

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in X.$$

Tips: kunskapen att funktionen $s \mapsto \frac{s}{1+s}$ är växande i $[0, \infty)$ kan vara nyttig.

3. Visa att mängden

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y < z\}$$

är öppen i $\mathbb{R}^3$ försedd med det euklidiska avståndet.

4. Låt $f : X \to Y$ vara en avbildning, där X och Y är metriska rum. Visa att f är kontinuerlig $X \to Y$ om och endast om följande villkor gäller: det slutna höljet

$$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$$

för varje mängd $B \subset Y$. *Tips:* urbildskriteriet för kontinuitet med slutna mängder kan användas.

KÄÄNNÄ!

MAT21005 Topologi IA
Kurssikoe 26.10.2018
Kesto: 2 t 30 min

1.(i) Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Määrittele käsitteet *avoin* joukko $A \subset X$ ja *suljettu* joukko $B \subset X$.
(ii) Perustele määritelmän nojalla miksi joukko

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$$

ei ole avoin eikä suljettu avaruudessa $\mathbb{R}^2$ varustettuna euklidisella metriikalla.

2. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Näytä, että d' on metriikka avaruudessa X, kun

$$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}, \quad x, y \in X.$$

Vihje: tieto, että funktio $s \mapsto \frac{s}{1+s}$ on kasvava joukossa $[0, \infty)$ saattaa olla hyödyllinen.

3. Näytä, että joukko

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y < z\}$$

on avoin avaruudessa $\mathbb{R}^3$ varustettuna euklidisella metriikalla.

4. Olkoon $f : X \to Y$ kuvaus, missä X ja Y ovat metrisiä avaruuksia. Näytä, että f on jatkuva $X \to Y$ jos ja vain jos seuraava ehto on voimassa: sulkeuma

$$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$$

jokaiselle joukolle $B \subset Y$. *Vihje:* jatkuvuuden alkukuvaehto suljettujen joukkojen avulla on hyödyllinen.

VÄND!

Topologi Ib
Kandidatprogrammet i matematiska vetenskaper
Kursförhör 20.12.2018
2h 30 min

1. Granska mängden
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq x < y < 4\} \subset \mathbb{R}^2.$$
Bestäm mängden $int(A)$ av innerpunkter, och randen ∂A i planet. Motivera ditt svar! I planet $\mathbb{R}^2$ används den euklidiska metriken.

2. Låt $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ vara avbildningen
$$f(x) = e^x.$$
Är f

(a) bilipschitz,
(b) en inbäddning?

Motivera.

3. Ge ett exempel på en följd avbildningar f_n som konvergerar punktvis men inte likformigt. Motivera noggrant.

4. Låt X och Y vara metriska rum och låt X vara kompakt. Låt $f : X \to Y$ vara en kontinuerlig avbildning och $A \subset X$. Visa att om A är fullständig så är fA kompakt.

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Topologi I, 2015

Delprov 2, 5.5.2015

Uppgifterna är ordnade enligt ämne. Man får ha med sig en handskriven "lunt-lapp"(Två handskrivna A4-papper).

1. Anta att $X = \mathbb{R}^2$ utrustad med den vanliga metriken. Bestäm inner-, ytter- och randpunkterna till mängden

$$A = \{(x_1, x_2) \in X \mid x_1 + x_2 < 7\}.$$

Motivera kort dina svar.

2. Anta att $X = \mathbb{R}^2$ utrustad med den vanliga metriken. Vi betraktar följden (z_n), där

$$z_n = \left(7 + \frac{1}{n^2}, 42 + \frac{1}{n}\right)$$

för varje $n = 1, 2, \ldots$. Visa att följden (z_n) konvergerar och bestäm dess gränsvärde.

3. Gör antingen uppgift (a) eller (b) (men inte båda).

(a) Vi betraktar ett metriskt rum (X, d) där $d(x, y) \leq 7$ för alla $x, y \in X$. Anta att funktionen $f : X \to X$ satisfierar villkoret $d(f(x), f(y)) \leq qd(x, y)$, för något $q \in [0, 1[$. Anta att $a \in X$ är en fixpunkt till funktionen f, dvs. $f(a) = a$. Anta att $x_0 \in X$ och betrakta följden (x_n), där $x_{n+1} = f(x_n)$ för alla $n = 0, 1, 2, \ldots$. Visa att $d(x_{n+1}, a) \leq 7q^{n+1}$ för alla $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(b) Anta att $X = \mathbb{R}$ utrustad med den vanliga metriken. Vi betraktar följden (f_n) där funktionen $f_n : X \to X$ är definierad för alla $n = 1, 2, \ldots$ genom

$$f_n(x) = \frac{x^2}{n(7 + x^2)}.$$

(i) Konvergerar följden (f_n) punktvis?

(ii) Konvergerar följden (f_n) likformigt?

4. Gör antingen uppgift (a) eller (b) (men inte båda).

(a) Anta att (X, d) är ett metriskt rum och $X = \{x_1, \ldots, x_{42}\}$. Visa att rummet (X, d) är fullständigt och kompakt.

(b) Anta att $X = \mathbb{R}^2$ utrustad med den vanliga metriken. Låt

$$A = \{(x_1, x_2) \in X \mid |x_2| \leq (x_1)^2\}.$$

Är A sammanhängande? Detaljerad motivering!

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Topologi 1, 2015
Kursprov I
3.3.2015

1. Antag, att (X, d) är ett metriskt rum. Antag, att punkterna a och b satisfierar villkoret $d(a, b) < 3$. Vi betecknar $r = 3 - d(a, b)$. Antag, att punkten x satisfierar villkoret $d(x, b) < r$. Visa, att $d(a, x) < 3$.

2. Antag, att (X, d) och (Y, d') är metriska rum och att mängderna X och Y är icke-tomma. Antag, att d är $\{0, 1\}$-metriken. Antag, att $f\colon X \to Y$ är en funktion och $a \in X$. Visa, att funktionen f är kontinuerlig i punkten a.

3. Antag, att mängden av alla reella tal $\mathbb{R}$ är utrustad med den vanliga metriken $(d(x, y) = |x - y|)$. Visa, att mängden

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid e^{sinx} > 1 + sin(e^x)\}$$

är öppen.

4. Antag, att mängden av alla reella tal $\mathbb{R}$ är utrustad med den vanliga metrikan $(d(x, y) = |x - y|)$. Bestäm det slutna höljet till mängden

$$A = \{1 - \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}.$$

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Topologia I, 2015
Kurssikoe 1
3.3.2015

1. Oletetaan, että (X, d) on metrinen avaruus. Oletetaan, että pisteet a ja b toteuttavat ehdon $d(a, b) < 3$. Merkitään $r = 3 - d(a, b)$. Oletetaan, että piste x toteuttaa ehdon $d(x, b) < r$. Osoita, että $d(a, x) < 3$.

2. Oletetaan, että (X, d) ja (Y, d') ovat metrisiä avaruuksia ja että joukot X ja Y ovat epätyhjiä. Oletetaan, että d on $\{0, 1\}$-metriikka. Oletetaan, että $f: X \to Y$ on funktio ja $a \in X$. Osoita, että funktio f on jatkuva kohdassa a.

3. Oletetaan, että reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ on varustettu tavallisella metriikalla ($d(x, y) = |x - y|$). Osoita, että joukko

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid e^{sinx} > 1 + sin(e^x)\}$$

on avoin.

4. Oletetaan, että reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ on varustettu tavallisella metriikalla ($d(x, y) = |x - y|$). Määritä joukon

$$A = \{1 - \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$$

sulkeuma.

Topology II
Exam December 21, 2023
Exam time 14.00-17.00

Problems

p1. Let $X = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ be the quoetient space, where $\mathbb{R}$ has the standard Euclidean topology and the quotient is given by equivalence relation $\sim$ satisfying $x \sim y$ if $x = y$ or $x, y \in \mathbb{Q}$. Is the subset $X \setminus \{\mathbb{Q}\}$ of the space X separable in relative topology? Justify your answer.

p2. Let X and Y be topological spaces, $a \in X$, $b \in Y$. Show that

$$C((a, b), X \times Y) \subset C(a, X) \times C(b, Y),$$

where $C(z, Z)$ is the z-component of Z for $z \in Z$. Here $X \times Y$ is the product space with product topology.

p3. Suppose $(X_i)_{i \in I}$ is a family of topological spaces having the property that the product space $X = \prod_{i \in I} X_i$ is locally compact. Show that there exists a finite set $F \subset I$ having the property that X_i is compact for $i \in I \setminus F$.

p4. Let $S = \{0\} \times [-1, 1] \cup \{(x, \sin(1/|x|)) \in \mathbb{R}^2 \colon x \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ and $H = \{0\} \times [-1, 1] \cup \{(x, \sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0\} \subset S$. Is H a retract of S? Justify your answer.

Topology II
Exam Tuesday October 24, 2023
Exam time 14.00-17.00

Problems

p1. Let $X = \{0\} \cup \mathbb{N}$ and let $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{\{0\} \cup A \colon A \subset \mathbb{N}\}$.

(a) Show that $\mathcal{T}$ is a topology in X.

(b) Show that $\{0\}$ is dense in $(X, \mathcal{T})$.

p2. Let $(X, \mathcal{T}_X)$ and $(Y, \mathcal{T}_Y)$ be topological spaces and let $f \colon X \to Y$ be an embedding. Show that the topology $\mathcal{T}$ induced by f from $\mathcal{T}_Y$ is $\mathcal{T}_X$.

p3. Let $\sim$ be the equivalence relation in $\mathbb{R}$ having equivalence classes $\mathbb{Q}$ and $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, that is, $x \sim y$ if either $\{x, y\} \subset \mathbb{Q}$ or $\{x, y\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Show that every continuous map $f \colon \mathbb{R}/{\sim} \to \mathbb{R}$ is constant, where $\mathbb{R}/{\sim}$ has the quotient topology.

p4. Let $(X, \mathcal{T}_X)$ be a topological space, where $X = \{0, 1\}$ and $\mathcal{T}_X = \{\emptyset, \{0\}, X\}$. For which $j = 1, \dots, 4$ the product space $X \times X$ is a T_j-space? Justify your answer.

Matematiikan ja tilastotieteen osasto/HY
Differentiaaliyhtälöt I MAT21012
Kurssitentti 5.3.2019 klo 12.00-14.30 Exactum

- Tentissä ei saa olla mukana laskinta, taulukkokirjaa tai kirjallista materiaalia paitsi yksi A4-kokoinen sivu vapaasti valittavia muistiinpanoja, jossa max. noin 60 riviä $\times$ 100 merkkiä / rivi

Seuraavissa tehtävissä y on tuntematon, reaalimuuttujasta x riippuva funktio.

1. a) Esitä differentiaaliyhtälön $y' + 2xy = 0$ yleinen ratkaisu, ja ratkaise vastaava alkuarvotehtävä ehdolla $y(0) = 4$.
b) Samoin yhtälölle $y' + 2xy = 3x$ ja alkuehdolle $y(0) = 8$.

2. Tarkastellaan yhtälöä

$$\frac{1}{x}\sin(xy) + y\cos(xy) + y'x\cos(xy) = 0$$

alueessa $\{x > 0\}$. Yhtälö voidaan palauttaa eksaktiksi kertomalla se x:stä riippuvalla integroivalla tekijällä. Ratkaise yhtälö.

3. Esitä differentiaaliyhtälön

$$y'' + 5y = x^2$$

yleinen ratkaisu.

4. Ratkaise yhtälö

$$y' = e^{2x-y^2}/y.$$

In the following problems y is an unknown function depending on the real variable x.

1. a) Write the general solution of the differential equation $y' + 2xy = 0$, and solve the corresponding initial value problem satisfying the condition $y(0) = 4$.
b) The same for the equation $y' + 2xy = 3x$ and the initial condition $y(0) = 8$.

2. Consider the equation

$$\frac{1}{x}\sin(xy) + y\cos(xy) + y'x\cos(xy) = 0$$

in the domain $\{x > 0\}$. The equation can be made into an exact one by multiplying it with an integrating factor depending on x. Solve the equation.

3. Write the general solution of the differential equation

$$y'' + 5y = x^2.$$

4. Solve the equation

$$y' = e^{2x-y^2}/y.$$

$Df(x)$

$D(f(x)) = f'(x)$

$f(x) = x^2$

$Df(x) = 2x$

$D = 2/x$

MAT21012 Differentialekvationer I
Kursprov 8.3.2018 (tid 2 h 30 min)

I kursprovet får ni ha med en ensidig handskriven minneslapp med storlek A4.

1. Sök alla lösningar $y = y(x)$ till följande differentialekvationer:

$$\text{(a)} \quad y' = e^{x-y} \qquad \text{(3 p.)}$$

$$\text{(b)} \quad y' - 3y = x. \qquad \text{(3 p.)}$$

$\int e^y dy = \int e^x dx$
$e^y = e^x + C$
$y = \ln(e^x + C)$

2. Undersök om differentialekvationen

$$1 + (1 + xy)e^{xy} + (1 + x^2 e^{xy})y' = 0$$

är exakt i $\mathbb{R}^2$ och sök dess lösningar $y = y(x)$ i implicit form.

3. Sök alla lösningar till differentialekvationen

$$y'' - 6y' + 9y = x + 1.$$

Tips: det lönar sig att söka en lösning till differentialekvationen med hjälp av metoden med obestämda koefficienter.

4. Verifiera att $y_1(x) = x$ är en lösning till den linjära homogena differentialekvationen

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$$

i intervallet $I = (0, \infty)$. Sök med reducering av ordningen en annan lösning $y_2(x) = C(x)x$ så att $\{y_1, y_2\}$ bildar ett fundamentalsystem av lösningar till differentialekvationen.

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaaliyhtälöt I (MAT21012)
Yleinen tentti 10.01.2018 (Tentin kesto on kolme ja puoli tuntia.)

Tentissä ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja.

Ratkaise seuraavat tehtävät 1, 2, 3 ja 4. Jokaisesta tehtävästä saa enintään 6 pistettä.

1. Ratkaise yhtälö
$$y' + y = x + 1.$$

2. Tarkastellaan yhtälöä
$$ye^{2xy} + 1 + xe^{2xy}y' = 0. \tag{1}$$
   i) Näytä, että yhtälö (1) on eksakti;
   ii) Määrää yhtälön (1) ratkaisut implisiittisessä muodossa $u(x, y) = C$.

3. Ratkaise yhtälö
$$y'' - y = x.$$

4. Tarkastellaan toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöä
$$y'' - 2y' + y = 0 \tag{2}$$
   i) Osoita, että funktio
   $$y_1(x) = e^x$$
   on yhtälön (2) ratkaisu;
   ii) Määrittele mitä tarkoittaa yhtälön (2) ratkaisukanta;
   iii) Etsi yhtälön (2) ratkaisukanta.

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaaliyhtälöt I, kevät 2017

Kurssikoe 7.3.2017 (Kokeen kesto on kaksi ja puoli tuntia.)

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja.

Ratkaise seuraavat tehtävät 1, 2, 3 ja 4. Jokaisesta tehtävästä saa enintään 6 pistettä.

1. Mikä on alkuarvo-ongelman
$$y' = y \sin x, \qquad y(0) = -1$$
ratkaisu $y = y(x)$?

2. Ratkaise differentiaaliyhtälö
$$y' + 4y = e^{-2x}.$$

3. a) Onko differentiaaliyhtälö
$$y^2 + 2xy - x^2y' = 0$$
eksakti jossain suorakaiteessa? (2 pistettä)

   b) Ratkaise alkuarvo-ongelma
$$y^2 + 2xy - x^2y' = 0, \qquad y(1) = 1,$$
kun $0 < x < 2$ (4 pistettä).

4. a) Mikä on differentiaaliyhtälön
$$y'' - y' - 2y = 0$$
perusjärjestelmä? (2 pistettä)

   b) Ratkaise differentiaaliyhtälö
$$y'' - y' - 2y = 12e^{x}.$$
(4 pistettä)

Differentialekvationer I
Kursprov 24.2. 2014

Påminnelse: ni får ha med en ensidig minneslapp med storleken A4.

1. Sök alla lösningar $y = y(x)$ till differentialekvationen

$$y' = y + y^2$$

samt den lösning som satisfierar initialvillkoret $y(0) = 1$.

2. Verifiera att differentialekvationen

$$1 + x^2 + y^2 + 2xyy' = 0$$

är exakt och bestäm de implicita lösningarna $y = y(x)$.

3. Bestäm den allmänna lösningen $y = y(x)$ till differentialekvationen

$$y'' - 4y' + 4y = e^x - e^{-x}.$$

Tips: sök en lösning till den icke-homogena ekvationen som har formen $y_0(x) = Ae^x + Be^{-x}$ (metoden med obestämda koefficienter).

4. Funktionen $y_1(x) = e^x$ löser differentialekvationen

$$y'' - (2 + \frac{1}{x})y' + (1 + \frac{1}{x})y = 0$$

på intervallet $(0, \infty)$. Sök med sk. reducering av ordningen en annan lösning $y_2(x) = C(x)e^x$, så att $\{y_1, y_2\}$ bildar ett fundamentalsystem av lösningar till ovanstående homogena differentialekvation.

Matematiikan ja tilastotieteen osasto/HY
MAT21012 Differentiaaliyhtälöt I
Tentti 3.3. klo 12.00-14.30 Exactum

Tentissä ei saa olla mukana laskinta, taulukkokirjaa tai kirjallista materiaalia paitsi yksi A4-kokoinen sivu vapaasti valittavia muistiinpanoja, jossa max. noin 60 riviä × 100 merkkiä / rivi

Seuraavassa y on tuntematon, reaalimuuttujasta x riippuva funktio.

1. a) (4 pist.) Ratkaise seuraava separoituva differentiaaliyhtälö:

$$y' + 6x^2 - 3x^2y = 0. \tag{1}$$

b) (2 pist.) Ratkaise yhtälöön (1) liittyvä alkuarvoprobleema alkuehdolla $y(0) = 3$.

2. Esitä seuraavan differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu:

$$y'' - 4y = 3x^2.$$

3. Ratkaise Bernoullin yhtälö

$$y' = 4y - 4xy^3.$$

4. Tarkastellaan yhtälöä

$$xy - 1 + (x^2 - xy)y' = 0$$

alueessa $\{x > 0\}$. Yhtälö voidaan palauttaa eksaktiksi kertomalla se x:stä riippuvalla integroivalla tekijällä. Ratkaise yhtälö.

In the following problems y is an unknown function depending on the real variable x.

1. a) (4 points.) Solve the following separable differential equation:

$$y' + 6x^2 - 3x^2y = 0. \tag{1}$$

b) (2 points.) Solve the initial value problem connected to the equation (1) with the initial condition $y(0) = 3$.

2. Write the general solution of the following differential equation:

$$y'' - 4y = 3x^2.$$

3. Solve the Bernoulli equation

$$y' = 4y - 4xy^3.$$

4. Consider the equation

$$xy - 1 + (x^2 - xy)y' = 0$$

in the domain $\{x > 0\}$. This equation can be made into an exact one by multiplying it by a factor depending on x. Solve the equation.

MAT21013 Differentialekvationer II
Kursprov 11.5.2018 (tid: 2 h 30 min)

I kursprovet får ni ha med en ensidig handskriven minneslapp med storlek A4.

1. Undersök om vektorfunktionerna $t \mapsto \{\overline{x}_1(t), \overline{x}_2(t)\}$ bildar ett fundamentalsystem av lösningar till det linjära differentialekvationssystemet

$$\overline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -1/t \end{pmatrix} \overline{x}(t), \quad t \in (0, \infty),$$

då $\overline{x}_1(t) = (-1, 1/t)^T$ och $\overline{x}_2(t) = (e^t, 0)^T$ för $t \in (0, \infty)$.

2. Sök alla lösningar till det homogena linjära differentialekvationssystemet

$$\overline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overline{x}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

med valfri metod.

3. Sök alla lösningar $(x_1(t), x_2(t))$ till det icke-homogena linjära differentialekvationssystemet

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) + x_2(t) + e^{3t} \\ x_2'(t) &= 2x_2(t) - e^{3t} \end{aligned}$$

med valfri metod. *Tips:* vid matrismetoden lönar det sig att söka en lösning $t \mapsto \overline{x}_0(t) = e^{3t}\overline{a}$ till det icke-homogena systemet, där $\overline{a} = (a_1, a_2)^T \in \mathbf{R}^2$ är en okänd vektor.

4. Visa att $(0, 0)$ är den enda kritiska punkten till det autonoma DE-systemet

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t) + x(t)y(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) - x(t)y(t) - 2y(t), \end{aligned}$$

samt bestäm dess typ (stabil eller instabil) på basen av en linjärisering och Poincarés stabilitetssats.

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaaliyhtälöt II, kevät 2017

Kurssikoe 9.5.2017

Kokeen kesto on kaksi ja puoli tuntia (2h 30min).

Kokeessa **EI SAA KÄYTTÄÄ LASKIMIA** eikä taulukkokirjoja.

Ratkaise seuraavat tehtävät 1, 2, 3 ja 4.

1. a) Etsi perusjärjestelmä systeemille

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \qquad \text{(2 pistettä)}$$

   b) Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad \text{(1 piste)}$$

   c) Ratkaise

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 6e^{2t} \end{bmatrix} \qquad \text{(2 pistettä)}$$

   d) Onko autonomisen systeeminen

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

   kriittinen piste $(0, 0)$ stabiili vai epästabiili? (1 piste)

2. Tutkitaan autonomista systeemiä

$$\begin{cases} x'(t) = (x(t) - 4)(1 - y(t)) \\ y'(t) = (x(t) + 1)(x(t) - 4) \end{cases}$$

   a) Mitkä ovat systeemin kriittiset pisteet? (2 pistettä)
   b) Mitkä ovat systeemin radat? (2 pistettä)
   c) Luonnostele piirtämällä systeemin aikakehitys/virtauskuvio. (2 pistettä)
   d) Etsi systeemin linearisointi kriittisissä pisteissä. Mitä voit nyt päätellä kriittisten pisteiden laadusta Poincarén stabiilisuuslauseesta? (2 pistettä)

3. Ratkaise

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \qquad \text{(4 pistettä)}$$

4. Tutkitaan differentiaaliyhtälöä

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

   missä

   - $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on jatkuva funktio,
   - $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ on olemassa ja $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leq 10$ kaikilla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
   - $f(t, t) = 1,\ t \in \mathbb{R}$.

   Onko olemassa sellaista ratkaisua $y_1(x)$, jolla $y_1(0) = 0$ ja y ei ole kolmesti derivoituva nollassa (eli $y_1'''(0)$ ei ole olemassa)? Perustele vastauksesi. (7 pistettä)

Differentialekvationer II
Kursprov 28.4. 2014

Obs. *I kursprovet får ni ha med en ensidig minneslapp av storlek A4.*

1. Sök alla lösningar $y = y(x)$ till differentialekvationen

$$y''' + y'' + y' + y = 0$$

med hjälp av försöket $y(x) = e^{rx}$, där r är en konstant.

2. Undersök om vektorfunktionerna $\{\overline{x}^1(t), \overline{x}^2(t)\}$ bildar ett fundamentalsystem av lösningar till differentialekvationssystemet

$$\overline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} \overline{x}(t)$$

på intervallet $(0, \infty)$, där $\overline{x}^1(t) = (t, 1)^T$, $\overline{x}^2(t) = (t^2, 2t)^T$.

3. Sök alla lösningar till det linjära differentialekvationssystemet

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_3'(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) + 3x_3(t). \end{aligned}$$

4. Sök alla lösningar till det icke-homogena systemet

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) + e^t \\ x_2'(t) &= 2x_1(t) + x_2(t) + 1. \end{aligned}$$

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN OSASTO
MAT21007 Mitta ja integraali
Kurssikoe 7.5.2019
Koeaikaa: 2 t 30 min.
Valitse ja ratkaise **4 (neljä)** tehtävää viidestä.

1.(i) Määrittele käsitteet Lebesgue mitallinen joukko $A \subset \mathbb{R}^d$ sekä d-ulotteinen Lebesguen mitta (ulkomittaa ei tarvitse määritellä).

(ii) Olkoon $A \subset \mathbb{R}^d$ osajoukko ja $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Näytä, että on olemassa sellainen avoin joukko G, että $A \subset G$ ja

$$m_d^*(G) \leq m_d^*(A) + \varepsilon.$$

2. Olkoot $A, B \subset \mathbf{R}^d$ sellaisia Lebesgue mitallisia joukkoja, että d-ulotteinen Lebesguen mitta $m_d(A \cap B) < \infty$. Näytä, että

$$m_d(A \cup B) = m_d(A) + m_d(B) - m_d(A \cap B).$$

3. Olkoon $f : E \to [0, \infty)$ mitallinen kuvaus, missä $E \subset \mathbf{R}^d$ on mitallinen joukko jolle $m_d(E) < \infty$. Määritellään $E_k = \{x \in E : 0 < f(x) < \frac{1}{k}\}$ kun $k \in \mathbb{N}$. Näytä, että E_k on mitallinen joukko kaikilla k, ja

$$\lim_{k \to \infty} m_d(E_k) = 0.$$

Muistutus: mittojen konvergenssilauseet.

4. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^d$ ja $f_j : E \to [0, \infty]$ jono mitallisia kuvauksia, missä $j \in \mathbb{N}$.

(i) Esitä monotonisen konvergenssin lause (MKL) oletuksineen (lausetta *ei* tarvitse todistaa).

(ii) Esitä Fatoun lemma oletuksineen ja todista se monotonisen konvergenssin lauseen avulla.

5. Laske raja-arvo

$$\lim_{k \to \infty} \int_1^\infty \frac{e^{-x} \cos(\frac{x}{k})}{1 + \frac{x}{k}} dx.$$

Jos käytät jotakin konvergenssilausetta, niin perustele miksi lauseen oletukset ovat voimassa!

Exam questions in English: please turn the page!

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND STATISTICS
MAT21007 Mitta ja integraali (Measure and integral)
Course exam 7.5.2019
Time: 2 h 30 min.
Select and solve **4 (four)** problems out of five.

1.(i) Define the concepts Lebesgue measurable set $A \subset \mathbb{R}^d$ and d-dimensional Lebesgue measure (you do not need to define the outer measure).

(ii) Let $A \subset \mathbb{R}^d$ be a subset and $\varepsilon > 0$ arbitrary. Show that there is an open set G, such that $A \subset G$ and

$$m_d^*(G) \leq m_d^*(A) + \varepsilon.$$

2 Let $A, B \subset \mathbf{R}^d$ be Lebesgue measurable sets such that the d-dimensional Lebesgue measure $m_d(A \cap B) < \infty$. Show that

$$m_d(A \cup B) = m_d(A) + m_d(B) - m_d(A \cap B).$$

3. Let $f : E \to [0, \infty)$ be a measurable mapping, where $E \subset \mathbf{R}^d$ is a measurable set for which $m_d(E) < \infty$. Define $E_k = \{x \in E : 0 < f(x) < \frac{1}{k}\}$ for $k \in \mathbb{N}$. Show that E_k is a measurable set for all k and that

$$\lim_{k \to \infty} m_d(E_k) = 0.$$

Reminder: convergence theorems for measures.

4. Let $E \subset \mathbb{R}^d$ and $f_j : E \to [0, \infty]$ be a sequence of measurable mappings, where $j \in \mathbb{N}$.

(i) State the monotone convergence theorem (MCT) including the assumptions (do *not* prove the MCT).

(ii) State Fatou's lemma including the assumptions and prove this result with the help of the monotone convergence theorem.

5. Compute the limit

$$\lim_{k \to \infty} \int_1^\infty \frac{e^{-x} \cos(\frac{x}{k})}{1 + \frac{x}{k}} dx.$$

If you use some convergence theorems, please verify that their assumptions are satisfied.

Tehtävät suomeksi: käännä sivu!

Mitta ja Integraali
Kesä 2015
Loppukoe

"I haven't failed. I just found 10 000 ways that won't work."

-Thomas Edison

Tehtävä 1 (6p) *Osoita ulkomitan määritelmää käyttäen, että rationaalilukujoukon* $\mathbb{Q}$ *ulkomitta on nolla:* $m_1^*(\mathbb{Q}) = 0$.

Tehtävä 2 (3+3p) *(a) Osoita, että jos* $m_n^*(E) = 0$, *niin* $E \subset \mathbb{R}^n$ *on* m_n-*mitallinen.*

(b) Olkoon joukko $E \subset \mathbb{R}^n$ *mitallinen ja joukko* $A \subset \mathbb{R}^n$ *sellainen, että* $E \cap A = \emptyset$. *Osoita Caratheodoryn ehdon avulla, että*

$$m_n^*(E \cup A) = m_n(E) + m_n^*(A). \tag{1}$$

Tehtävä 3 (3+3p) *(a) Olkoon* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ *kun* $x \in \mathbb{Q}$ *ja* $f(x) = x^2$ *kun* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. *Osoita, että funktio* f *on mitallinen.*

(b) Olkoon funktio $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mitallinen ja funktio* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sellainen, että* $h(x) = g(x)$ *melkein kaikilla* x. *Osoita, että myös* h *on mitallinen.*

Tehtävä 4 (6p) *Laske raja-arvo*

$$\lim_{k \to \infty} \int_1^k \frac{1 + e^{-kx^2}}{x^2}\, dx.$$

(Perustele mahdollisen konvergenssilauseen oikeutus. Huomaa: $\int_1^k = \int \chi_{[1,k]}$.*)*

HU / Avdelningen för ekonomi
YET034b Matematik 2
Kursprov 14.11.2023 kl. 10:00–12:00

På baksidan av provet finns en formelsamling. Användning av andra hjälpmedel (tabelböcker, räknare) i provet är inte tillåtet.
Kom ihåg att motivera dina svar!

1. Derivera.

   (a) $f(x) = 3x - x^5 + 2$ (b) $g(x) = \ln \frac{1}{x^2}$ (c) $h(x) = (x^3 + 2x - 1)e^x$

   (d) $P(Q) = 3Q(Q-2)$ (e) $a(s) = -9s^2 + 8s + 7$ (f) $q(t) = \frac{\ln t}{t^4 + 2}$

2. En funktion har uttrycket

$$p(x) = (x^2 + x - 1)e^x.$$

   Bestäm

   (a) derivatafunktionen,

   (b) de lokala extremställen och deras karaktär samt

   (c) ekvationen för tangenten till funktionen p i punkten $x = 1$.

3. Enligt bokföringen i ett varuhus säljer man 480 chokladaskar per vecka, när priset är 4 euro per ask. Dessutom har man observerat att försäljningen minskar med 15 askar per vecka för varje 2 euro som priset per ask höjs. Vilket ska styckepriset på chokladaskarna vara för att inkomsterna från försäljningen av askarna ska vara så stor som möjligt? Hur många chokladaskar säljer man då under en vecka?

4. Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ och

$$f(x, y) = x^3 - \frac{3}{2}y^2 + 3xy - 3y + 17.$$

   (a) Bestäm gradienten

   (b) Bestäm de kritiska punkterna till funktionen f, alltså lös $\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   (c) I vilken riktning från punkten $(1, 1)$ växer funktionen mest? Vad är tillväxthastigheten i den riktningen? (Tips: Vad anger $|\nabla f(x, y)|$?)

Formelsamling

Lösningsformeln för andragradsekvationen $ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Deriveringsregler

$$\begin{aligned} D(f+g)(x) &= f'(x) + g'(x) \\ D(fg)(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ D\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}, \quad \text{om } g(x) \neq 0 \\ Df(g(x)) &= f'(g(x))g'(x) \end{aligned}$$

Elasticitet

$$\mathrm{El}_x f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)/x} = \frac{xf'(x)}{f(x)}$$

Grundformeln för ränteräkning

$$K = A\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Geometrisk serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = \frac{a}{1-q}, \quad \text{om} \quad -1 < q < 1$$

Enpunktsformeln och riktningskoefficienten för räta linjer

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad \text{och} \quad k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Normen (längden) av en vektor

$$\left\| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

HU / Avdelningen för ekonomi
YET034a Matematik 1
Kursprov 3.10.2023 kl. 10:00–12:00

Användning av hjälpmedel (tabelböcker, räknare) i provet är inte tillåtet.
Kom ihåg att motivera dina svar!

1. Hyfsa.

(a) $\frac{2}{6} - \frac{1}{3} + \frac{5}{4}$ (b) $2\sqrt{9}\sqrt{\frac{15}{4}}$ (c) $\frac{-3^4 + 9^3}{3^3} \cdot (-3)^{-1}$

(d) $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - b^2}$ (e) $-5^4 + (-5)^4$ (f) $\frac{x+y}{x} + \frac{x-3y}{y}$

2. Du hyr en lägenhet på $32\,\mathrm{m}^2$ med månadshyran 760 € i Helsingfors.

   (a) Vad är hyran per kvadratmeter? Ange svaret med två gällande siffrors noggrannhet.

   (b) Folkpensionsanstalten beviljar dig allmänt bostadsbidrag, som är 80 % av din hyra. Hur stort är bidraget?

   (c) Ditt bidrag sänks, så att det nu är 70 % av din hyra. Med hur många procent minskade ditt bidrag?

3. Lös.

(a) $4x + 10 = 7 + 5x$ (b) $4x^2 - 2x - 10 = -x^2 + 3x + 20$ (c) $x^2 - x - 6 \geq 0$

4. Vi undersöker utbud och efterfrågan av bananer. Låt Q vara mängden av bananer i kilogram, S funktionen som anger kilopriset för bananer baserat på Q och D funktionen som anger kilopriset konsumenter är redo att betala baserat på Q. Här är S utbudet av bananer medan Q är efterfrågan av bananer. Vi antar att dessa funktioner är linjära och vi vet att $S(25) = 1$, $D(26) = 4$, $D(46) = 1{,}5$ och $S(76) = 4$.

   (a) Bilda uttrycken för funktionerna S och Q med hjälp av variabeln Q.

   (b) När nås marknadsjämvikten? Alltså när gäller $S(Q) = D(Q)$?

   (c) Rita en bild över situationen.

Formler

- $x_2 = x_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$
- $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- $y - y_0 = k(x - x_0)$
- $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Reaalianalyysi I / Hytönen
Erilliskoe 3 h 30 min — 18.5.2016

Ratkaise vapaavalintaiset neljä (4) tehtävää seuraavista. Varoitus: Jos palautat liian monta ratkaisua, tarkastaja jättää mielivaltaisesti jonkin ylimääräisen niistä kokonaan arvostelematta – ei välttämättä heikointa!

1. Olkoon $\operatorname{Bor}\mathbb{R}^n$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ Borelin σ-algebra, ja $\operatorname{Leb}\mathbb{R}^n$ kaikkien mitallisten joukkojen σ-algebra. Perustele, että $\operatorname{Bor}\mathbb{R}^2 \neq \operatorname{Leb}\mathbb{R}^2$. Saat käyttää muita kurssilla todistettuja tuloksia ilman todistusta.

2. Olkoon $p \in [1,\infty)$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, ja merkitään $\tau_h f(x) := f(x+h)$, kun $x, h \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että
$$\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0.$$
Saat vedota haluamaasi tiheystulokseen, kunhan mainitset sen täsmällisesti.

3. Joukkoa $E \subset \mathbb{R}^n$ sanotaan *huokoiseksi*, jos on olemassa sellainen vakio $\alpha > 0$, että jokainen kuula $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$ (missä siis $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$ ovat mielivaltaisia) sisältää pienemmän kuulan $B(y,\alpha r) \subset B(x,r) \setminus E$.

   Osoita, että mitallisen ja huokoisen joukon mitta on nolla. (Mieti tiheyspisteitä.)

4. Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitetusti heilahteleva funktio. Tarkastellaan joukkoa
$$E_k := \{x \in (a,b) : f'(x) \text{ on olemassa ja } |f'(x)| > k\}.$$
Osoita, että tämän joukon ulkomitta toteuttaa
$$m^*(E_k) \leq \frac{1}{k} V_f(a,b).$$

5. Määritellään
$$f(x) := \begin{cases} x\cos(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
Selvitä perustellen, millä parametrin $\alpha > 0$ arvoilla funktio $|f|^\alpha$ on absoluuttisesti jatkuva välillä $[0,1]$.

English version on the other side.

Real analysis I / Hytönen
Exam 3 h 30 min — 18.5.2016

Solve four (4) problems of your own choice among the following. Warning: If you return too many solutions, one of them will not be graded, and not necessarily the weakest one!

1. Let $\operatorname{Bor}\mathbb{R}^n$ be the Borel σ-algebra of $\mathbb{R}^n$, and $\operatorname{Leb}\mathbb{R}^n$ the σ-algebra of all measurable sets. Show that $\operatorname{Bor}\mathbb{R}^2 \neq \operatorname{Leb}\mathbb{R}^2$. You can use other results proved in the course without proving them.

2. Let $p \in [1, \infty)$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, and denote $\tau_h f(x) := f(x+h)$, when $x, h \in \mathbb{R}^n$. Prove that
$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0.$$
You may use a density result, if you like, as long as you explain, which result you use.

3. A set $E \subset \mathbb{R}^n$ is called *porous*, if there is a constant $\alpha > 0$, such that every ball $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$ (where both $x \in \mathbb{R}^n$ and $r > 0$ are arbitrary) contains a smaller ball $B(y, \alpha r) \subset B(x, r) \setminus E$.
Prove that every measurable porous set has measure zero. (Think of points of density.)

4. Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be a function of bounded variation. Consider the set
$$E_k := \{x \in (a, b) : f'(x) \text{ exists, and } |f'(x)| > k\}.$$
Show that the outer measure of this set satisfies
$$m^*(E_k) \leq \frac{1}{k} V_f(a, b).$$

5. Define the function
$$f(x) := \begin{cases} x \cos(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
Find and explain the range of the parameter $\alpha > 0$ for which the function $|f|^\alpha$ is absolutely continuous on the interval $[0, 1]$.

Suomeksi kääntöpuolella.

Department of Mathematics and Statistics
University of Helsinki

Exam on
COMPLEX ANALYSIS I
6.5.2019

Only pencils, erasers, and rulers are allowed.
No electronic devices or formula booklets are permitted.
You have 3 hours to complete the exam.

0.1. **Problem.** Determine whether the following functions are analytic.
(a)
$$f(z) = z \operatorname{Re} z.$$
(b)
$$g(z) = \frac{z}{\bar{z} - 2019}.$$

0.2. **Problem.** Let f be an analytic function in the whole complex plane. If there exists $M > 0$ such that $|f(z)| > M$ for all $z \in \mathbb{C}$, show that f is constant in the whole complex plane.

0.3. **Problem.** Let $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ and $r > 0$ be given such that
$$|z_1| < r < |z_2|.$$
If $\sigma = 5\gamma$ is a cycle where $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = r\exp(it)$, evaluate the integral
$$\int_\sigma \frac{dz}{(z - z_1)(z - z_2)}.$$

0.4. **Problem.** Show that
$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

MAST31002 Functional analysis Second partial exam (2,5 h) 19.12.2022

Please include your *name* and *student number* on your answer sheets. In addition to standard writing equipment, you are allowed to bring in and consult **one** handwritten two-sided A4 sheet of personal notes during the exam.

Problem 1

As proven during the lectures, the Hilbert space $L^2([0,2\pi])$ has a Hilbert basis $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ where $e_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{ikx}$ for $x \in [0,2\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$. Suppose $f \in L^2([0,2\pi])$ and denote its scalar product with e_k by $c_k := (f\,|\,e_k) \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$.

(Grading: To get the maximum points from the questions in this Problem, it is enough to state the correct answer, you do not need to justify it. Maximum *2 points* from each of the items.)

(a) Express $\|f\|$ using only the numbers c_k, $k \in \mathbb{Z}$.

(b) By general Hilbert space theory, we can approximate f arbitrarily well by finite linear combinations which involve only c_k and e_k. Write down this approximation explicitly, including in which sense the "error" goes to zero.

(c) What does the previous result imply about the convergence of Fourier series of f? Can you conclude that the series then converges at every point $x \in [0,2\pi]$?

Problem 2

Let E be a Banach space, let $I = \mathrm{id}_E$ denote the identity operator on E, and suppose $T \in \mathcal{L}(E)$.

(a) What is the Neumann series of T, under which standard condition on $\|T\|$ is it convergent, and which operator does it then converge to? (You do not need to prove your answer.) (*2 points*)

(b) Assume that the convergence condition in (a) is satisfied and show that then

$$\|(I-T)^{-1} - I - T\| \le \frac{\|T\|^2}{1-\|T\|}. \qquad (\textit{4 points})$$

Problem 3

(a) What is the dual space E^* of a normed space E? How is the canonical bilinear form $\langle x, y^*\rangle$ for $x \in E$, $y^* \in E^*$ defined? (*2 points*)

(b) Suppose $1 < p < \infty$. During the lectures it was proven that then $(\ell^p)^* \cong \ell^q$ for some real parameter q. Which q, and what does "$\cong$" mean here? (*1 point*)

(c) As above, suppose $E = \ell^p$ and $1 < p < \infty$. Prove that the rule

$$(Tx)_n = x_{n+1}\,, n \in \mathbb{N}\,,$$

defines a bounded linear operator $T : E \to E$. Construct a bounded linear map $S : E^* \to E^*$ such that

$$\langle x, Sy^*\rangle = \langle Tx, y^*\rangle\,,$$

for all $x \in E$ and $y^* \in E^*$. (*3 points. Hint:* You can try first solving the problem in the case $p = 2$ using the Fréchet–Riesz theorem.)

Problem 4

(a) Write down the assumptions and statement of the closed graph theorem. (*2 points*)

(b) Suppose H is a Hilbert space, with an inner product $(\cdot\,|\,\cdot)$, and $T : H \to H$ is a linear map. Assume that $(Tx\,|\,y) = (x\,|\,Ty)$ for all $x, y \in H$. Show that T is a bounded operator. (*4 points. Hint:* Closed graph theorem.)

MAST31002 Functional analysis First partial exam (2,5 h) 24.10.2022

Please include your *name* and *student number* on your answer sheets. In addition to standard writing equipment, you are allowed to bring in and consult **one** handwritten two-sided A4 sheet of personal notes during the exam.

General advice: Even for a maximal grade, you do not need to be able to answer all of the items below correctly. If an item looks tricky, it is better to jump over it and, time allowing, return to it later.

Problem 1

The following five standard sequence and function spaces have been introduced during the course

$$\mathbb{R}^4\,,\quad \ell^{\frac{3}{4}}\,,\quad \ell^4\,,\quad L^2(\mathbb{R}^4)\,,\quad L^\infty(\mathbb{R}^2)\,.$$

(a) From the above list, select all Banach spaces and give in detail the definition of the *space* and of its *norm*. (You do not need to justify your answer.)

(b) From the above list, select all Hilbert spaces and give in detail the definition of the *space* and of its *inner product*. (You do not need to justify your answer.)

(Grading: in total *6 points* from the two items.)

Problem 2

(a) Consider the vector spaces ℓ^p, ℓ^q consisting of real-valued sequences, for some p,q satisfying $1<p,q<\infty$. Suppose $f\in\ell^p$ and $g\in\ell^q$. Write down the assumptions and the statement of the Hölder's inequality relevant to f and g. *(2 points)*

(b) Let $1\le p<p'\le\infty$. Show that for all $x=(x_n)\in\ell^p$ we have also $x\in\ell^{p'}$ and

$$\|x\|_{p'}\le\|x\|_p\,. \qquad \textit{(4 points)}$$

Problem 3

Consider the complex function space

$$C_0(\mathbb{R}_+):=\left\{f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{C}\,\middle|\, f\text{ continuous and }\lim_{x\to\infty}f(x)=0\right\}\,,$$

where $\mathbb{R}_+:=[0,\infty[\,=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\ge0\}$.

(a) Show that $C_0(\mathbb{R}_+)\subset BC(\mathbb{R}_+):=\{f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{C}\,|\,f\text{ continuous and bounded}\}$. *(3 points)*

(b) It was proven during the lectures that $BC(\mathbb{R}_+)$ is a Banach space under the sup-norm, $\|f\|_\infty:=\sup_{x\ge0}|f(x)|$. Show that also $C_0(\mathbb{R}_+)$ is a Banach space under the sup-norm. *(3 points)*

Problem 4

(a) Write down the assumptions and statement of the Banach fixed point theorem. *(2 points)*

(b) Show that there is exactly one function $f_0\in C_0(\mathbb{R}_+)$ for which $|f_0(x)|\le1$ for all x and

$$f_0(x)=\frac{1}{\sqrt{4+x}}+\frac14\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y}f_0(yx)f_0(yx^2)\mathrm{d}y\,,\quad x\ge0\,. \qquad \textit{(4 points)}$$

FUNCTIONAL ANALYSIS / FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
EXAM 2, Dec. 16th, 2019/ VÄLIKOE 2, 16.12. 2019

Answers may be written in English, Finnish or Swedish

Kaikissa tehtävissä voit olettaa, että kerroinkunta on reaalilukujen joukko.

1. Onko seuraava bilineaarinen kuvaus koersiivinen $\ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{R}$:

$$R : (x, y) \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_{k+1},$$

missä $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$, $y = (y_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$?

2. Esitä jokin esimerkki kahdesta jatkuvasta lineaarisesta operaattorista $S : X \to X$ ja $T : X \to X$ Banach-avaruudessa X, jotka eivät kommutoi, toisin sanoen $ST \neq TS$. Banach-avaruuden on oltava ääretönulotteinen, mutta muuten voit valita esimerkin vapaasti.

3. Esitä lyhyt perustelu sille, että avaruus $C(0, 1)$ varustettuna L^1-normilla

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$$

ei voi olla täydellinen. (Käytä hyväksi luennoilla esitettyjä tuloksia. Voit olettaa esim. tunnetuksi, että $\|\cdot\|_1$ ja sup-normi eivät ole ekvivalentteja.)

4. Määritteleekö

a) jono $(1, 1, 1, \ldots)$ avaruuden ℓ^2 duaalin alkion,

b) funktio $f(t) = 1/\sqrt{|t|}$ avaruuden $L^p(-1, 1)$, $1 < p < \infty$, duaalin alkion,

kyseisten avaruuksien tavanomaisen duaaliparin mielessä?

****

In all problems you may assume that the scalar field is the set of real numbers.

1. Is the following bilinear mapping coercive $\ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{R}$:

$$R : (x, y) \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_{k+1},$$

where $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$, $y = (y_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$?

2. Give an example of two continuous non-commuting linear operators $S : X \to X$ and $T : X \to X$ in the Banach space X, in other words, operators with $ST \neq TS$. The Banach space must be infinite dimensional, otherwise you can choose the example as you wish.

3. Write a short argument for the fact that the space $C(0, 1)$ endowed with the L^1-norm

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$$

cannot be complete. (You should use the results presented on the lectures. You can for example use that $\|\cdots\|_1$ and the sup-norm are not equivalent.)

4. Does

a) the sequence $(1, 1, 1, \ldots)$ define an element of the dual of ℓ^2,

b) the function $f(t) = 1/\sqrt{|t|}$ define an element of the dual of $L^p(-1, 1)$, $1 < p < \infty$,

with respect to the usual dual pairings?

FUNCTIONAL ANALYSIS 13.5.2016
EXAM / KURSSIKOE 2 h 30 min A111

1. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, joka on 2π-periodinen sekä 2 kertaa jatkuvasti derivoituva (joten esim. $f(0) = f(2\pi)$ ja sama derivaatoille). Osoita, että f:n Fourier-kertoimille $\hat{f}(m)$, $m \in \mathbb{Z}$, pätee $|\hat{f}(m)| \le C(1+|m|)^{-2}$ kaikilla m, missä positiivinen vakio C ei riipu m:stä.

2. Onko bilineaaarimuoto

$$B : (f, g) \mapsto \int_0^2 f(x)g(2-x)dx$$

jatkuva (=rajoitettu) tai koersiivinen avaruudessa $L^2(0,2)$?

3. Suppeneeko seuraava jono $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ jatkuvia lineaarisia operaattoreita, $T_n : C(-1,1) \to C(-1,1)$ a) pisteittäin, b) operaattorinormin mielessä, kun
$T_n f(t) = tf(1/n)$ missä $f \in C(-1,1)$ ja $t \in [-1,1]$ on muuttuja.

4. Olkoon $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$ ja $a = (2^{-n})_{n=1}^{\infty} \in \ell^q$. Esitä, miten alkio a määrittelee avaruuden ℓ^p duaalin alkion. Laske a:n normi avaruudessa $(\ell^p)^*$. (Käytä luennoilla esitettyjä tuloksia ℓ^p-avaruuksien duaalista.)

****

1. Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a function, which is 2π-periodic and 2 times continuously differentiable (hence e.g. $f(0) = f(2\pi)$ and the same for the derivatives). Prove that the Fourier-coefficients $\hat{f}(m)$, $m \in \mathbb{Z}$, of f satisfy $|\hat{f}(m)| \le C(1+|m|)^{-2}$ for all m, where the positive constant C does not depend on m.

2. Is the following bilinear form continuous (=bounded) or coercive in the space $L^2(0,2)$,

$$B : (f, g) \mapsto \int_0^2 f(x)g(2-x)dx \quad ?$$

3. Does the following sequence $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ of continuous linear operators $T_n : C(-1,1) \to C(-1,1)$ converge a) pointwise b) in operator norm, when
$T_n f(t) = tf(1/n)$ where $f \in C(-1,1)$ and $t \in [-1,1]$ is a variable.

4. Let $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$ and $a = (2^{-n})_{n=1}^{\infty} \in \ell^q$. How does the element a define an element of the dual of ℓ^p ? Calculate the norm of a in the space $(\ell^p)^*$. (Use the results on the dual space of ℓ^p which were presented on the lectures.)

FUNCTIONAL ANALYSIS – KURSSIKOE 1/EXAM 1 – 11.3.16 klo/at 12.15-14.45

1. Suppenevatko seuraavat jonot $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ Banach-avaruudessa $C(0,1)$ (yksikkövälin $[0,1]$ jatkuvat funktiot, sup-normi; $t \in [0,1]$ on muuttuja):

$$\text{a) } f_n(t) = \frac{1}{t+2+n}\ , \quad \text{b) } f_n(t) = \frac{1}{t+2+\frac{1}{n}}\ , \quad \text{c) } f_n(t) = \frac{1}{t+\frac{1}{n}}$$

2. Tarkastellaan Hilbert-avaruuden ℓ^2 alkioita

$$\alpha = (1,0,0,0,\ldots)\ , \quad \beta = (1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{8}\ldots)$$

eli α on jono, jonka ensimmäinen alkio 1 ja muut nollia, sekä β jono, jonka $2n-1$:s ja $2n$:s alkio ovat 2^{-n+1}. a) Mikä on joukon $\{\alpha\}$ ortogonaalinen komplementti? b) Etsi jokin $x \in \ell^2$, $x \neq 0$, jolle pätee $(x|\alpha) = (x|\beta) = 0$.

3. Osoita, että integraaliyhtälöllä

$$\cos(2t) + \int_{-1}^{1} \frac{\sin(2s)}{50+t^2} f(s)^2 ds - f(t) = 1\ , \quad t \in [-1,1],$$

on ratkaisu avaruudessa $C(-1,1)$. Voit pitää tunnettuna, että kaavassa esiintyvä integraalilauseke on t:n jatkuva funktio, kun $f \in C(-1,1)$.

4. Muistutetaan mieleen, että Banach-avaruuden X osajoukko B on kompakti, jos jokaisella joukkoon B sisältyvällä jonolla $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on suppeneva osajono. Valitsemalla sopiva jono osoita, että avaruuden ℓ^2 suljettu yksikköpallo $\overline{B}(0,1) = \{x \in \ell^2 : \|x\| \leq 1\}$ ei ole kompakti.

****

1. Do the following sequences $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge in the Banach-space $C(0,1)$ (continuous functions on the interval $[0,1]$ with sup-norm; $t \in [0,1]$ is a variable):

$$\text{a) } f_n(t) = \frac{1}{t+2+n}\ , \quad \text{b) } f_n(t) = \frac{1}{t+2+\frac{1}{n}}\ , \quad \text{c) } f_n(t) = \frac{1}{t+\frac{1}{n}}$$

2. In the Hilbert-space ℓ^2, let us consider the elements

$$\alpha = (1,0,0,0,\ldots)\ , \quad \beta = (1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{8}\ldots)$$

in other words α is a sequence with the first element 1 and others 0, and β is a sequence with $2n-1$:st and $2n$:th elements 2^{-n+1}. a) What is the orthogonal complement of the set $\{\alpha\}$? b)Find some $x \in \ell^2$, $x \neq 0$ such that $(x|\alpha) = (x|\beta) = 0$.

3. Prove that the integral equation

$$\cos(2t) + \int_{-1}^{1} \frac{\sin(2s)}{50+t^2} f(s)^2 ds - f(t) = 1\ , \quad t \in [-1,1],$$

has a solution in $C(0,1)$. You do not need to prove that the integral expression in the equation is a continuous function of t, when $f \in C(-1,1)$.

4. Let us recall that a subset B of a Banach space X is compact, if every sequence $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ contained in B has a convergent subsequence. By choosing a suitable sequence, show that the closed unit ball $\overline{B}(0,1) = \{x \in \ell^2 : \|x\| \leq 1\}$ of ℓ^2 is not compact.

Department of Mathematics and Statistics
University of Helsinki

FUNCTIONAL ANALYSIS II EXAM , Feb. 8th, 2023

No calculators or tables are allowed in the exam.
Solutions are accepted in English, Finnish or Swedish.

Note! In Problems 2 and 4 you are expected to answer to only one of the cases a) or b); choose as you wish.

1. Show that the subspace $X = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f(2) = 0\}$ of the space $C^\infty(\mathbb{R})$ is closed, in other words, if $(f_n)_{n=1}^\infty$ is a sequence of elements of X converging to a function $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, then $g \in X$.
The topology of $C^\infty(\mathbb{R})$ is defined by the seminorms

$$p_m(h) = \sup_{\substack{-m \le x \le m \\ k \le m}} \left| \frac{d^k h(x)}{dx^k} \right|,$$

where $m = 1, 2, \ldots$

2. Choose a) or b). Both items concern distributions on the domain $\Omega = \mathbb{R}$.

a) Prove that the Fourier-transform of the constant function $f(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, is a constant times the Dirac measure of 0.

b) Show that the function of the variable $x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}} e^{-nx^2/4}, \quad n \in \mathbb{N},$$

converges to the distribution δ_0 in the weak topology of the space $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, when $n \to \infty$.

3. Let $\Omega =]0, 5[$. Does the function $f(x) = (2-x)^{3/5}$, $x \in \Omega$, belong to the Sobolev space $W^{1,1}(\Omega)$, $W^{1,3}(\Omega)$ or $W^{3,1}(\Omega)$? Does the function $g(x) = (2-x)|2-x|$ belong to the Sobolev space $W^{2,2}(\Omega)$?

4. (Choose a) or b))

a) Let $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ be a periodic domain in the plane as in Chapter 9 of the lectures. Present the definition of the Floquet-transform, its inverse and isomorphic mapping properties in the spaces $L^2(\Pi)$ and $H^1(\Pi) = W^{1,2}(\Pi)$. You do not need to prove anything.

b) The Sobolev embedding, i.e., the identity operator $I : W^{1,p}(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ is continuous for all $1 < p < 2$. Show that the operator I is not compact (it does not map all bounded subsets of the domain into precompact subsets of the target space, equivalently, there is a bounded sequence in the domain which does not have convergent subsequences in the target space) for any p, $1 < p < 2$.

FOURIER ANALYSIS I. (Spring 2020)

FINAL EXAM (Thursday 5.3 9-12 in room B121)

Choose freely only 4 questions out the following 6 !!

1. Let $f \in C^1_\sharp(-\pi, \pi)$ be a function whose all Fourier coefficients are real, i.e. $\widehat{f}(n) \in \mathbf{R}$ for all $n \in \mathbf{Z}$. Show that f is even, i.e. $f(-x) = f(x)$ for all $x \in (-\pi, \pi)$.

2. Let $f \in C^2_\#$ and $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$. Prove Poincare type inequality.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|^2 dx.$$

For which functions do you have equality here?

3. Give an example of function $f \in L^1[-\pi, \pi)$ such that its Fourier series is not absolutely convergent but it converges at every point $x \in [-\pi, \pi)$. Do this by using the results of the lectures without actually computing the Fourier coefficients.

4. Find the Fourier coefficients of the 2π-periodic function f, where $f(x) = |x|$, for $[-\pi, \pi)$. At which points does the obtained Fourier series converge?

5. Solve – to find a formal solution formula is enough – by using Fourier series the following PDE. Here $x \in [0, 2\pi)$, $t \geq 0$ and $x \to u(x,t)$ is assumed to be 2π-periodic, and the solution satisfies the initial value $u(x, 0) = f(x)$, where $f \in L^2(-\pi, \pi)$ (of course you may assume that f is 2π-periodic).

$$\frac{d}{dt}u(x,t) = 4\left(\frac{d}{dx}\right)^2 u(x,t).$$

What happens to the solution as $t \to \infty$?

6. Recall the definition of equidistribution (mod 1) for given sequence $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ of real numbers. What is Weyl's criterion for equidistribution? Use it to prove that $(n\alpha)_{n=1}^{\infty}$ is equidistributed if α is irrational.

Probability theory I - Exam 25.10.2018

The exam lasts 2 hours 45 minutes. Only pen and paper are allowed on the exam. The whole exam is worth 18 points: **6 points** are enough to pass; **14 points** are enough to get 5.

PROBLEM 1. Let X and Y be two independent scalar random variables uniformly distributed on $(0;1)$ (that is, with density $\mathbb{I}_{(0;1)}$).

(1) (**2 points**) Compute the probability distribution function of $\max(X, 2Y)$ and the expectation $\mathbb{E}(\max(X, 2Y))$.
(2) (**2 points**) Compute $\mathbb{E}(\min(X, \frac{1}{2}))$

Olkoot X ja Y riippumattomia satunnaismuuttujia, jotka ovat tasajakautuneita välillä $(0;1)$ (toisin sanoen, joiden tiheysfunktio on $\mathbb{I}_{(0;1)}$).

(1) Laske satunnaismuuttujan $\max(X, 2Y)$ kertymäfunktio ja sen odotusarvo $\mathbb{E}(\max(X, 2Y))$.
(2) Laske $\mathbb{E}(\min(X, \frac{1}{2}))$.

PROBLEM 2. Let $X_1, X_2, \ldots$ be scalar random variables defined on the same probability space, such that $\mu := \mathbb{E}|X_n| < \infty$ does not depend on n.

(1) (**2 points**) Prove that $\frac{1}{n}X_n \to 0$ in probability;
(2) (**2 points**) Prove that $\frac{1}{n^2}X_n \to 0$ almost surely.

Olkoot $X_1, X_2, \ldots$ satunnaismuuttujia samalla todennäköisyysavaruudella siten, että $\mu := \mathbb{E}|X_n| < \infty$ ei riipu n:stä.

(1) Osoita, että $\frac{1}{n}X_n \to 0$ stokastisesti;
(2) Osoita, että $\frac{1}{n^2}X_n \to 0$ melkein varmasti.

PROBLEM 3. (**4 points**) Let $X_1, X_2, \ldots$ be i. i. d. scalar random variables with probability density function

$$f(x) := \begin{cases} 3x^{-4}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$

Let $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$. Compute the limit $L(a) := \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\frac{1}{n}S_n \leq a)$ as a function of $a \in \mathbb{R}$.

Olkoot $X_1, X_2, \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia siten, että niiden tiheysfunktio on

$$f(x) := \begin{cases} 3x^{-4}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$

Olkoon $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$. Laske raja arvo $L(a) := \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\frac{1}{n}S_n \leq a)$ parametrin $a \in \mathbb{R}$ funktiona.

PROBLEM 4. (**2 points** for computation + **4 points** for justification) Let X be a scalar random variable, such that the characteristic function of X is

$$\mathbb{E}e^{itX} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Compute $\mathbb{E}X$ and $\mathbb{E}X^2$.

Olkoon X reaaliarvoinen satunnaismuuttuja siten, että X:n karakteristinen funktio on

$$\mathbb{E}e^{itX} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Laske $\mathbb{E}X$ ja $\mathbb{E}X^2$.

Probability theory I - Exam 25.10.2016

PROBLEM 1. Let $X_1, X_2, \ldots$ be independent, identically distributed random variables such that $\mathbb{E}X_i = 0$ and $0 \neq \mathbb{E}X_i^2 < \infty$, and let $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Compute $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n > 0)$.

PROBLEM 2. Let X and Y be two independent scalar random variables, such that X has density $\mathbb{I}_{(0;1)}$ and Y has density $e^{-x}\mathbb{I}_{(0;+\infty)}(x)$. (In other words, X is uniformly distributed on $(0,1)$, and Y has exponential distribution with expectation 1.) Compute $\mathbb{P}(X - Y > 0)$.

PROBLEM 3. Let X and Y be independent standard Gaussians (that is, have density $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$). Prove that $X + Y$ and $X - Y$ are independent.

PROBLEM 4. Let $X_1, \ldots, X_{10}$ be independent, identically distributed random variables with density $e^{-x}\mathbb{I}_{(0;+\infty)}(x)$. Prove that

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{10} X_i \geq 20\right) \leq e^{-10(1-\ln 2)}.$$

PROBLEM 5. Let X be a scalar random variable uniformly distributed on $(0;1)$ (that is, the density of X is given by $\mathbb{I}_{(0,1)}$). Consider the function

$$\psi(t) := \mathbb{E}(\tan(tX^2)).$$

Prove that the function ψ is differentiable on $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, and compute $\psi'(0)$.

PROBLEM 6. Let $X_1, X_2, \ldots$ be scalar random variables such that for all i, one has $\mathbb{P}(X_i \in \mathbb{Z}) = 1$. Assume that the limit

$$L(k) := \lim_{i\to\infty} \mathbb{P}(X_i = k)$$

exists for all $k \in \mathbb{Z}$, and $\sum_{k\in\mathbb{Z}} L(k) = 1$. Prove that the sequence X_i converges in distribution.

PROBLEM 7. Let F_X and F_Y be two probability distribution functions satisfying $F_X(a) \leq F_Y(a)$ for all $a \in \mathbb{R}$. Prove that there exist random variables X', Y', defined on a common probability space, such that $F_{X'} \equiv F_X$, $F_{Y'} \equiv F_Y$, and $X' \geq Y'$ almost surely.

PROBLEM 8. Let X be a scalar random variable, and let $\varphi_X(t)$ be its characteristic function. Prove that $\mathbb{P}(X \in \mathbb{Z}) = 1$ if and only if $\varphi_X(t)$ is 2π-periodic, that is, $\varphi_X(t) = \varphi_X(t + 2\pi)$ for all $t \in \mathbb{R}$.

Inverse Problems 1 2022 - Final Exam

October 2022

Instructions

1. This exam is worth a total of 40 points.
2. You have 3 hours to answer it.
3. Answer the questions in a separate sheet of paper. **Write your name and student number to the each sheet of paper.** Annotations made in this sheet will not be considered.
4. Question 1 is mandatory. You can choose 3 of the remaining 4 questions (Q2 to Q5) to answer. **Make it very clear in your answer sheet which questions should be considered**. Anything you write about the excluded question will not be considered.

Q1 (Mandatory) (Total points: 10) Consider the Hadamard's classical definition of a well-posed problem.

Well-posedness (Hadamard). *A problem is well-posed if all the three conditions below holds*

(H1) Given any input, there exists an output;

(H2) For each input, the output is unique;

(H3) The output depends continuously on the input.

In this course we considered the measurement model

$$m = Af,$$

where $f, m \in \mathbb{R}^n$ and $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is a convolution matrix. Answer the following questions:

(a) (2 points) What is the "input" and "output" in the direct problem (convolution)?

(b) (2 points) What is the "input" and "output" in the inverse problem (deconvolution)?

(c) (2 points) Explain why the direct problem is well-posed in the sense of (H1)—(H3).

(d) (2 points) Consider the singular value decomposition $A = UDV^T$. Write down the important properties of the matrices U, V and D.

(e) (2 points) Assume that the singular values of A are all positive. Explain how the inverse problem (deconvolution) can be ill-posed. (HINT: Reformulate (H3) like this: if the input changes a little bit, the output also changes only a little bit.)

Q2 (Total points: 10) Consider the following discrete point spread function $p[n]$ of length 5 and original signal $s[n]$ of length 10

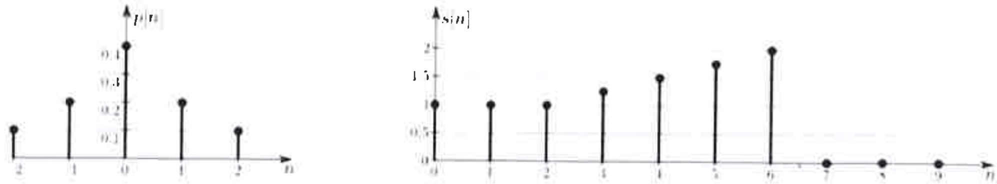


Figure 1: Point spread function $p[n]$ and signal $s[n]$.

Create the convolution matrix A such that $p * s = As$ for each of the following boundary conditions. Make sure the matrix is square.

a) (3 points) Zero boundary condition

$$s[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 0 & n > 9 \end{cases}$$

b) (3 points) Periodic boundary condition

c) (4 points) Constant boundary condition

$$\overset{1}{} \quad s[n] = \begin{cases} s[0] & n < 0 \\ s[9] & n > 9 \end{cases} \quad \underset{0}{}$$

P_{-2} P_{-1} P_0 P_1 P_2

S_1 S_1 S_1 S_2 S_3 . . .

0.7

$(P_{-2} + P_{-1} + P_0) S_1$

0.3

$(P_{-1} + P_0) S_1$

$S_{10}(P_1 + P_2)$

$S_{10}(P_0 + P_1 + P_2)$

S_{10} S_{10} S_{10}

 P_{-2} P_{-1} P_0 P_1 P_2

Q3 (Total points: 10) Consider the linear system $Ax = b$, where $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is invertible and $b \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, leading to the solution $x = A^{-1}b \in \mathbb{R}^n$. Also consider the noisy measurement $b_\delta = b + \delta$, leading to the perturbed solution $x_\delta = A^{-1}b_\delta \in \mathbb{R}^n$.

We will proof this important relation between the relative error in the solution $||x - x_\delta||/||x||$ and the relative noise in the measurement vector $||\delta||/||b||$

$$\frac{||x - x_\delta||}{||x||} \leq \text{cond}(A)\frac{||\delta||}{||b||}, \tag{1}$$

where $||\cdot||$ is assumed to be the Euclidean norm and $||b|| > 0$ and $||x|| > 0$.

HINTS FOR THIS QUESTION:

- $||Mv|| \leq ||M||||v||$, where M and v are a matrix and a vector of appropriate sizes.
- The euclidean norm of a matrix (spectral norm) is the largest singular value of the matrix

$$||A|| = \sigma_{max}.$$

a) (2.5 points) Show that

$$||x|| \geq \frac{||b||}{\sigma_1}, \tag{2}$$

where σ_1 is the largest singular value of A.

b) (2.5 points) Next we need to find $||A^{-1}||$. Show that

$$||A^{-1}|| = \frac{1}{\sigma_n}, \tag{3}$$

where σ_n is the smallest singular value of A.

c) (2.5 points) Show that

$$||x - x_\delta|| \leq \frac{1}{\sigma_n}||\delta||. \tag{4}$$

d) (2.5 points) Finally, show that

$$\frac{||x - x_\delta||}{||x||} \leq \text{cond}(A)\frac{||\delta||}{||b||}, \tag{5}$$

Q4 (Total points: 10) Consider the following linear system $Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\epsilon \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

where $\epsilon > 0$ is a positive real number. And the following theorem

Theorem. *Let $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ be a symmetric matrix. The singular values of A are the absolute values of the eigenvalues of A and the columns of $U = V$ are the eigenvectors of A.*

a) (2.5 points) Show that the singular values of A are

$$\sigma_1 = 1 + \frac{\epsilon}{2} + \sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2} \tag{7}$$

$$\sigma_2 = 1 + \frac{\epsilon}{2} - \sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2}. \tag{8}$$

b) (2.5 points) Find the condition number (with respect to the Euclidean norm) of matrix A when $\epsilon = 0.1$.

c) (2.5 points) Assume you have noisy measurements $b_\delta = b + \delta$. Using (1) from question 3, find the maximum norm of the measurement error $\|\delta_{max}\|$ that still guarantees that the relative error $\|x - x_\delta\|/\|x\|$ is smaller or equal to 0.01. Assume $\epsilon = 0.1$.

d) (2.5 points) If $\epsilon < 0.1$, do you expect $\|\delta_{max}\|$ to be bigger or smaller than in the previous item? Justify your answer.

Q5 (Total points: 10) Consider the same linear system of the previous question with noisy measurement $Ax = b_\delta$, where $\epsilon = 0.1$ and

$$b_\delta = b + \delta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 2.1 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

HINTS FOR THIS QUESTION:
The inverse of a 2x2 matrix:

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{10}$$

a) (5 points) Solve the linear system adopting the following Tikhonov regularization strategy and assuming $\alpha = 0.1$. Use the normal equations formulation

$$x_\delta = \arg\min_x \{\|Ax - b_\delta\|^2 + \alpha\|x\|^2\}. \tag{11}$$

$T_\alpha = (A^T A + \alpha I)^{-1}(A^T b_\delta)$

b) (5 points) Compute the residual of the solution you found in the previous item. Following the Morozov's discrepancy principle, is $\alpha = 0.1$ above or below the optimal value? Justify your answer. OBS: If you did not find any result in the previous item, assume $x_\delta = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}^T$ for your calculations.

Exam: Introduction to bifurcation theory (I)
Department of Mathematics and Statistics
University of Helsinki
14.12.2016

You only choose five questions in the following, all questions carry equal weight. Success!

Question 1. Are the following systems diffeomorphic?

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = -x_2, \end{cases} \quad \textit{and} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = -2x_2. \end{cases}$$

Question 2. If the solution $x(t)$ of equation $\dot{x} = f(x)$ (here $f \in C(\mathbf{R}^n)$) has limit x^*, i.e., $x(t) \to x^*$ (as $t \to +\infty$), then $f(x^*) = 0$, i.e., x^* is a fixed point.

Question 3. Consider $\begin{cases} \dot{x} = -xy - 3x^7, \\ \dot{y} = -y + x^2. \end{cases}$ Determine the stability of the equilibrium at the origin (using the center manifold theorem).

Question 4. What are the definitions of the following
(a) two systems are topologically equivalent;
(b) two systems are smoothly equivalent (or diffeomorphic);
(c) two systems are orbitally equivalent.
What are the relations between (a), (b) and (c).

Question 5. What are the definitions of bifurcation and bifurcation diagram for a system? Draw the bifurcation diagram for the following system: $\dot{x} = f(x, u) = ux - x^3$, $x \in \mathbf{R}^1$, $u \in \mathbf{R}^1$.

Question 6. Consider $\begin{cases} \dot{x} = u + x^2 + y^2, \\ \dot{y} = -y + x^2, \quad u \in \mathbf{R}^1. \end{cases}$
What bifurcations this system undergoes at an equilibrium at the origin when u passes zero?

Introduction to Mathematical Biology
EXAM: 31 October 2022

1. The exam lasts 105 minutes (12.15-14.00).
2. On the first page, please write your name and email readably (e.g. in print).
3. Put your name on every separate paper.
4. You can ask me if you do not understand a question only because of the English.
5. I shall email you the results, and if you wish, you can have a look at the corrected exam. If you do not hear about the results within two weeks, please contact me.
6. You can re-take the exam if you want a better grade.

The three problems are given equal weight in the grade.

1. Many proteins regulate their own production by binding to their gene and blocking the transcription of DNA (negative feedback). Let x and y denote respectively the concentration of the protein and the fraction of time the gene is free (this is similar to the concentration of free genes). When the gene is free, it produces the protein at a constant speed c. The protein binds to the gene at rate k_1 and releases from the gene at rate k_2. The unbound protein decays at rate δ. These assumptions lead to the ODE system

protein free bounded

$$\frac{dx}{dt} = cy - k_1xy + k_2(1-y) - \delta x = y(c - k_1x - k_2) + k_2 - \delta x$$

free

$$\frac{dy}{dt} = -k_1xy + k_2(1-y)$$

where all parameters are assumed to be positive. Assume that binding and unbinding is much faster than the production and decay of the protein, i.e., $k_1, k_2 \gg c, \delta$.

(a) Find the quasi-equilibrium of y and show that it is always positive and globally asymptotically stable.
(b) Write a single differential equation for the slow dynamics of protein concentration. Investigate the number and stability of equilibria.

2. Consider a population of an annual plant A that follows the Skellam model of discrete-time population growth,

$$x_{t+1} = 1 - e^{-\alpha x_t}$$

where x_t is the fraction of occupied sites in year t and α is the number of seeds per plant. This model describes a population where seeds are distributed randomly over the sites and each site that has received at least one seed will be occupied by one plant.

Suppose that this populaton is at a positive equilibrium. Then a new plant species B appears with the following properties:

(i) it has β seeds per plant, and
(ii) if there is any seed of the original species A present in a site, then all seeds of species B in this site die (i.e., they are all outcompeted by A)

(a) Show that plant A is viable if $\alpha > 1$ and in this case, its positive equilibrium $\hat{x}$ is stable. *Hint:* the value of $\hat{x}$ cannot be obtained analytically but this does not prevent the proof. Part (b) can be done without (a).
(b) Show that if β is sufficiently large, then the two species mutually invade each other's equilibrium population and therefore coexist.

3. Consider a population where the reproduction of females is limited by their ability to find males. The population has an equal number of males and females (N each). A female encounters males according to mass action at a rate β. Upon mating, the female produces B female and B male offspring and returns to searching for males after T time. All individuals die at a density-dependent rate $\mu + aN$. By the analogy of the Holling II functional response for the birth term, these assumptions lead to the dynamics

$$\frac{dN}{dt} = \frac{bN}{1+cN}N - (\mu + aN)N$$

where $b = \beta B$, $c = \beta T$, and all parameters are assumed to be positive.

(a) Find all biologically meaningful equilibria of this model and establish their stability. *Hint:* recall that finding the stability of one equilibrium helps to find the stability of all others.
(b) Suppose fecundity and therefore b is initially high enough to maintain a positive population size but to a change in the environment, b decreases. Describe both mathematically (bifurcation) and in practical terms (verbal advice to a manager) what happens to this population and what is the minimum value of b to avoid extinction. (Non-degeneracy conditions need not be checked.)

Introduction to Mathematical Biology
EXAM: 24 October 2022

1. The exam lasts 105 minutes (10.15-12.00).
2. On the first page, please write your name and email readably (e.g. in print).
3. Put your name on every separate paper.
4. You can ask me if you do not understand a question only because of the English.
5. I shall email you the results, and if you wish, you can have a look at the corrected exam. If you do not hear about the results within two weeks, please contact me.
6. You can re-take the exam if you want a better grade.

The three problems are given equal weight in the grade.

1. Suppose that individuals encounter each other according to mass action at a rate β. An encounter means a fight, in which one of the two individuals dies with probability p_1 and both die with probability p_2 ($1 - p_1 - p_2$ is the probability that both survive). The natural death rate (all deaths other than fights) is μ and the birth rate is b (both are constant, $0 < \mu < b$).

(a) Calculate the size of the population at the nontrivial equilibrium and show that this equilibrium is stable.
(b) Calculate the probability that an individual dies in a fight when the population is at equilibrium.

2. Consider a population of bacteria that pollute the environment by producing a toxic substance. The dynamics is governed by

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= bN - (\mu + \rho T)N \\ \frac{dT}{dt} &= \alpha N - \delta T,\end{aligned}$$

where $N(t)$ is the size of the population at time t. $T(t)$ is the concentration of the toxin, which is produced by the bacteria at a *per capita* rate $\alpha > 0$ and decays exponentially at a rate $\delta > 0$ (uptake by the bacteria is negligible). The toxin kills at a rate proportional to its concentration, $\rho T(t)$. Finally, $\mu > 0$ and $b > \mu$ are the (constant) background death rate and the birth rate, respectively. We assume that the toxin is produced and decays fast compared to the population dynamics of the bacteria (α and δ are large compared to

b, μ and ρ).

(a) Show that the bacteria grow according to the logistic equation and give r_0 and K in terms of the model parameters.
(b) Suppose several strains of the bacteria are grown together, which all produce the same toxin but differ in the parameters b and μ. Show that the model is an optimization model and the optimal strain maximizes K. (Results derived in the lecture can be used without proof.)

3. Insect pests may be eradicated by releasing sterilized males. Females who mate with a sterile male do not produce any offspring, so that the average *per capita* fecundity of females decreases. Assume that in absence of control, the population follows the Beverton-Holt model

$$N_{t+1} = \frac{bN_t}{1 + aN_t}$$

with $b > 1$ and $a > 0$, where N_t denotes the number of females. Let S be the number of sterile males released. We can reasonably assume that without interference, the number of males and females are equal, so that the number of ordinary fertile males is also N_t. Females fail to reproduce if they mate with a sterile male, and this happens with probability $S/(N_t + S)$. The population dynamics thus become

$$N_{t+1} = \frac{bN_t}{1 + aN_t}\left(1 - \frac{S}{N_t + S}\right) = \frac{bN_t}{1 + aN_t} \cdot \frac{N_t}{N_t + S}$$

It is straightforward to show that the model is undercompensating (i.e., the derivative of the right hand side with respect to N_t is always positive for $N_t > 0$; proof not required).

(a) Show that for any $S > 0$, the trivial equilibrium $\hat{N} = 0$ is asymptotically stable.
(b) Show that with increasing S, the system undergoes a fold bifurcation and find the critical value of S above which the population has no positive equilibrium. *Hint:* calculating the equilibrium as a function of S is rather cumbersome. It is easier to find the value of S necessary to have a certain equilibrium $\hat{N}$; draw S against $\hat{N}$ and reverse the axes to obtain a bifurcation diagram of the equilibria. The non-degeneracy conditions of the fold bifurcation don't have to be checked.

MATHEMATICAL MODELING EXAM
10–12–2015

- *Mark all papers with name and student number.*
- *The maximum time for the exam is four hours.*
- *Use of lecture notes is NOT allowed.*

QUESTION 1

Consider a parasitoid-host system where each adult butterfly (i.e., the host) produces new larvae at a constant rate. If a larva is found by a parasitoid wasp, then the wasp deposits a single egg inside the larva, independently of the number of eggs that may already be inside. A larva containing zero eggs of the parasitoid develops into an adult butterfly, but a larva containing a single egg develops into an adult parasitoid. Larvae with two or more eggs inside do not develop into anything at all but simply die (presumably because there is not enough food present for the parasitoids to complete their development). Larvae, butterflies and parasitoids are also subject to death at a constant rate due to other (unspecified) causes.

Formulate a model of the above system, i.e., specify the various i-states, model the i-level processes with a network of mono- and bimolecular reactions, and assuming mass-action, give the corresponding population model as a system of differential equations for the population densities.

QUESTION 2

Consider the following SIS-model:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} &= \alpha - \beta SI + \gamma I - \delta S \quad \text{(susceptibles)} \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I - (\delta + \varepsilon) I \quad \text{(infected)} \end{cases}$$

with all positive parameters. Interpret the various terms and parameters of the above system in terms of i-level processes. Give a phase-plane analysis of the system. Find all equilibria and establish their stability. Use linear stability analysis if the phase-plane analysis is inconclusive. Distinguish between the cases where there *does* and *does not* exists a positive equilibrium with both S and I present.

Continued on the next page ...

QUESTION 3

The following discrete-time model is due to Hassell (1975) and is often being used for insect populations:

$$x_{n+1} = \frac{ax_n}{(bx_n + 1)^c}$$

where $a, b, c > 0$ and where x_n denotes the population density at the beginning of the season in year n. Show that this model can be derived from a continuous-time interference competition model for the within-season dynamics, assuming there is a single reproductive burst at the beginning of the season, and assuming that during the season adult individuals attack both other adults and juveniles (i.e., eggs or larvae). No other processes are involved. Give the within-season model as a system of two ordinary differential equations with initial conditions. Solve these equations and derive the between-season dynamics. Show that the resulting model is Hassell's model. In particular, express the a, b, c in terms of the the parameters of the within-season model.

QUESTION 4

Formulate a model of the following situation as a system of partial differential equation with reflecting boundary conditions:

When two individuals meet they may start a fight during which they ran around as a pair in a random manner. The fight lasts for an exponentially distributed amount of time until they separate again. In order to avoid painful collisions, single individuals tend to move away from fighting pairs. Sometimes, however, a collision is unavoidable, in which case the fight is instantly over and the pair breaks immediately apart.

Don't forget the boundary conditions.

Success!

University of Helsinki
Master's Programme in Mathematics and Statistics
Mathematical logic, spring 2019
2nd mid-term exam
3.5.2019

1. Let T be an $\{E\}$-theory such that for every $n \in \mathbb{N}$ there exists a model $\mathcal{M}_n \models T$ in which E defines an equivalence relation with n equivalence classes. Show that T has a model where E defines an equivalence relation with infinitely many equivalence classes.

2. Show that the function $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ that produces the Fibonacci sequence ($F(0) = 0$, $F(1) = 1$, and for $n > 1$, $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$) is primitive recursive.

3. Show that there is no recursive function $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ with the property that if $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is a recursive function, then there is some $n \in \mathbb{N}$ such that for all $m \in \mathbb{N}$ one has

$$f(n, m) = g(m).$$

4. State and prove Gödel's first incompleteness theorem. You may use earlier results from the course.

University of Helsinki
Master's Programme in Mathematics and Statistics
Mathematical logic, spring 2019
1st mid-term exam
5.3.2019

1. Show directly from the definition of provability that

$$\{(A \to (C \to B)), (\neg C \to \neg A)\} \vdash (A \to B).$$

2. Show that

$$\nvDash ((\exists v_0 P v_0 \wedge \exists v_0 Q v_0) \to \exists v_0 (P v_0 \wedge Q v_0)).$$

3. Let $L = \{R\}$ be a vocabulary with a binary relation symbol R. Consider the L-structure $(\mathbb{Z}, <)$, where $<$ is the natural order on $\mathbb{Z}$. Is the relation $S = \{(a, a+1) : a \in 2\mathbb{Z}\}$ definable, where $2\mathbb{Z}$ is the set of even integers? Justify your answer.

4. (a) Show that if L is a vocabulary, φ and ψ are logically equivalent L-formulas (i.e., $\varphi \leftrightarrow \psi$ is valid), and t is an L-term such that both $FVF(t, v_0, \varphi)$ and $FVF(t, v_0, \psi)$ hold, then also $\varphi(t/v_0)$ and $\psi(t/v_0)$ are logically equivalent.

   (b) Give an example showing that the claim is not true without the FVF-assumptions.

Department of Mathematics and Statistics
Dependence Logic
Course exam 14.12.2023

1. Show that there exists a dependence logic sentence ϕ with vocabulary $\tau = \emptyset$ such that for all finite structures $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} \models \phi \Leftrightarrow |\mathrm{Dom}(\mathcal{M})| \text{ is odd.}$$

If you wish, you may use the fact that $\mathrm{FO}(=(\ldots)) \equiv_s \Sigma_1^1$.

2. Let $\phi \in \mathrm{FO}(\subseteq)$. Show that the following logical equivalence holds:

$$\phi \equiv \phi \vee \phi. \tag{1}$$

Construct a formula $\psi \in \mathrm{FO}(=(\ldots))$ for which the equivalence of (1) fails.

3. Give the truth condition for independence atoms $\vec{x} \perp_{\vec{z}} \vec{y}$, that is, when does $\mathcal{M} \models_X \vec{x} \perp_{\vec{z}} \vec{y}$ hold? Let x, y, z be pairwise distinct variables. Construct formulas ϕ, ψ and θ of independence logic such that

$$(\phi \wedge \psi) \vee \theta \;\; \not\equiv \;\; (\phi \vee \theta) \wedge (\psi \vee \theta).$$

4. Show for all structures $\mathcal{M}$ and teams X, if $\mathcal{M} \models_X \vec{x} \perp \vec{y}$ and $\mathcal{M} \models_X \vec{x}\vec{y} \perp \vec{z}$, then $\mathcal{M} \models_X \vec{x} \perp \vec{y}\vec{z}$. Recall that $\vec{x} \perp \vec{y}$ is an abbreviation for the independence atom of the form $\vec{x} \perp_{\vec{z}} \vec{y}$, where $\vec{z} = \emptyset$.