

Write your student number on every sheet of paper.

**DO NOT** write your name on any of the papers.

It's not enough to do the calculations, you should also explain what you do.

1. Explain the following concepts/answer the following questions in a few lines. (Equations are not necessary, but if you use them, explain what the symbols are and what they mean.)
  - a) How does special relativity unify spatial rotations and Galilei transformations?
  - b) Explain the weak and strong equivalence principle **starting from general relativity**.
  - c) If we integrate the components of a tensor over a proper volume element, why do the resulting quantities **not** form the components of a tensor? (Excluding the case of scalars.)
2. Consider 1+1-dimensional Minkowski space in Cartesian coordinates.
  - a) Derive the Lorentz transformation matrix  $\Lambda^\alpha_\beta$  from the condition that the transformation leaves the line element

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2$$

invariant. (You may neglect time reversal and spatial reflection.)

b) Express the transformation parameter in terms of the velocity  $v \equiv \frac{dx}{dt}$ .

3. Consider the spatially flat FLRW universe with the metric

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \delta_{ij} dx^i dx^j .$$

Calculate the components  $R_{0i0j}$  and  $R_{ijkl}$  of the Riemann tensor.

4. Consider the linearly perturbed Minkowski metric

$$ds^2 = -(1 + 2\phi)dt^2 + (1 - 2\phi)\delta_{ij}dx^i dx^j .$$

Show that in the weak field and slow motion limit, the geodesic equation for timelike geodesics reduces to the Newtonian equation of motion  $\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\delta^{ij} \partial_j \phi$ .

5. Show that in the Schwarzschild spacetime photons can have circular geodesics. Show that such orbits are unstable.

Kokeessa sallitaan vain kynä ja kumi. Laske joka tehtävä omalle paperilleen! Muista kirjoittaa nimesi ja opiskelijanumerosi jokaiseen paperiin!

1. Karteesisessa  $(x, y, z)$  kannassa vektorit  $\vec{a}$  ja  $\vec{b}$  ovat

$$\vec{a} = (2, 1, 0) \quad \vec{b} = (2, -1, 0)$$

(a) Laske  $\vec{a} \times \vec{b}$

(b) Jaa vektori  $\vec{a}$  vektorin  $\vec{b}$ :n suuntaiseen ja sitä vastaan kohtisuoraan komponenttiin.

2. Derivoi seuraavat funktiot  $x$ :n suhteen

(a)  $\sqrt{1+x^2}$

(b)  $x \tan x$

(c)  $\ln\left(\frac{1}{x-1}\right)$

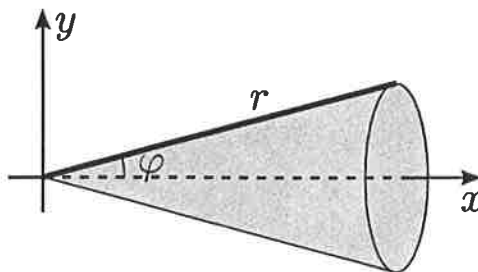
3. Laske integraalit

$$(a) \int \frac{dx}{1+e^x} \quad (b) \int e^{-x} \cos x \, dx$$

4. Laske

$$\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x+2)} \, dx$$

5. Muodosta funktion  $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$  Taylorin sarja kehityspisteenä origo. Millä  $x$ :n arvoilla kyseinen sarja suppenee? Mikä toisen asteen polynomi approksimoi funktiota  $f(x)$  origon ympäristössä?
6. Origosta lähtevä  $r$ -pitäinen jana muodostaa  $x$ -akselin kanssa kulman  $\varphi$ . Pyörähdyškappale muodostuu oheisen kuvan mukaisesti, kun jana pyörähtää  $x$ -akselin ympäri. Millä kulmalta  $\varphi$  pyörähdyškappaleen tilavuus on suurimmillaan?



$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_i a_i b_i$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \left(\frac{df}{dg}\right) \left(\frac{dg}{dx}\right)$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

$$s = \int_a^b dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$V = \pi \int_a^b dx (y(x))^2$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\frac{d}{dx} f(x)g(x) = f'g + fg'$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\int_a^b f'g dx = \int_a^b fg - \int_a^b fg' dx$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

$$A = 2\pi \int_a^b dx y(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Skriv ditt namn och studienummer på VARJE svarspapper.

Skriv uppgifterna 1, 2 och 3 på ett svarspapper, och uppgifterna 4 och 5 på ett annat. Du får förstås använda flera papper. Svarspappren delas upp i två delar för att underlätta poängsättningen av kursproven.

Bara penna, gummi eller dylika skrivverktyg tillåts!

Beteckningen (Np) står för antalet poäng för den deluppgiften.

1. Lös differentialekvationerna

a)  $y' - y = 0$  med begynnelsevärdet  $y(0) = 1$  (3p).

b)  $yy' - x = 0$  med begynnelsevärdet  $y(0) = -1$  (3p).

2. Lös differentialekvationen

$$2y'' - 3y' - 2y = -2$$

med begynnelsevärdena  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$  (6p).

3. Vektorfältet  $\mathbf{F}$  definieras enligt  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ . Beräkna integralen

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

när  $C$  är en stig från punkten  $(0, 0, 0)$  till punkten  $(1, 1, 1)$

a) längs en rak linje (3p).

b) längs kurvan  $x = t$ ,  $y = t^2$ ,  $z = t^3$ ,  $0 \leq t \leq 1$  (3p).

4. Hitta matrisens

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

egenvärden (3p) och de normaliserade egenvektorer som motsvarar egenvärdena (3p).

5. a) Visa att matrisen  $A$  ur föregående uppgift är reguljär (1p).

b) Hitta inversen  $A^{-1}$  till matrisen  $A$  (3p).

c) Lös ekvationerna (2p)

$$Av = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Av = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Matematiska hjälpmedel II 2019, slutförhör

1. Låt  $z_1 = a + ib$  och  $z_2 = c + id$ , var  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Förenkla följande komplexa talen till formen  $x + iy$ , var  $x, y \in \mathbb{R}$ .

- (a) (1 p.)  $z_1 - z_2$ ,
- (b) (1 p.)  $z_1 z_2$ ,
- (c) (2 p.)  $(z_1 + z_2^*)(z_1 - z_2^*)$ ,
- (d) (2 p.)  $z_1 / z_2^*$ .

2. Vi granskar differentialekvationen

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = b(x). \quad (*)$$

Motivera, är följande påståelser sanna eller falska:

- (a) (2 p.)  $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$ , var  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ , är den allmänna lösningen för den homogena ekvationen.
- (b) (2 p.) Om  $b(x) = e^x + e^{-x}$ , så är  $y(x) = Dx^2 e^{-x} + Ee^x$  för vissa reella värden av  $D$  och  $E$  differentialekvationens (\*) speciallösning.
- (c) (1 p.) Om  $b(x) = 2x + 1$ , så existerar  $A, B \in \mathbb{R}$  så att  $y(x) = Ax + B$  är differentialekvationens (\*) speciallösning.
- (d) (1 p.) Om  $b(x) = x^2$ , så är  $y(x) = x^2 - 4x + 6$  differentialekvationens (\*) speciallösning.

3. Vi undersöker följande linjära första gradens differentialekvation vars koefficienter inte är nödvändigtvis konstanta

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x),$$

var funktionerna  $p(x)$  och  $q(x)$  antas vara kontinuerliga i ett intervall som innehåller  $x = x_0$ .

(a) (3 p.) Visa att, ekvationens lösning som uppfyller rätt begynnelsevillkor i punkten  $x = x_0$  kan skrivas i formen

$$y(x)e^{I(x)} = \int_{x_0}^x dt e^{I(t)} q(t) + y(x_0),$$

$$\text{var } I(x) \equiv \int_{x_0}^x dt p(t).$$

(b) (3 p.) Lös begynnelsevillkor-problemet

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = 1,$$

Instruktioner:

- Du får ha med dig bara skrivredskap: penna, gummi, linjal.
- Skriv var uppgifts lösning på eget konceptpapper.
- Svara på varje uppgift någonting (så att lösningar inte misstänks ha försvunnit).
- Skriv på varje konceptpapper ditt namn och studerandenummer.
- Märk att uppgifterna fortsätter på andra sidan av provpappret!

I uppgift 5: Som påminnelse:  $\frac{ax^2 + bx + c}{bx + c} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2a}(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})$

I uppgift 3: I b-delen kan du använda a-delens formel oberoende av om du lyckas lösa a-delen. Integralerna som kommer emot borde lösas ganska lätt endera rakt eller med att partiellintegrera:  $\int dx f'g = f/g - \int dx fg'$ .

4. (6 p.) Finn matrisformen till linjärbildningen  $F$ , som avbildar 2-dimensionerliga kolumnvektorerna  $(1, 2)$  och  $(2, -1)$  enligt följande:

$$F \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. (6 p.) Vi definierar  $2 \times 2$ -matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestäm matrisens:

- (a) (2 p.) spår och determinant,
- (b) (2 p.) egenvärden,
- (c) (2 p.) egenvektorer.

**Uppgift 5:** Som påminnelse:

$$\det A = \sum_{j,k=1}^n \epsilon_{ijk} \dots A_{1i} A_{2j} \dots$$

För  $2 \times 2$ -matriser  $\det A = ad - bc$ ,

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$A \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$$

# Matematiska hjälpmedel III - 2022, sluttent

R. Paatelainen

9. Mars, 2022

## Instruktioner:

- Tenttid 4h (kl. 09-13:00).
- Besvara alla fem frågor.
- Skriv ditt namn och studentnummer på VARJE svarpapper.

1. Vi betraktar skalärfältet  $f(x, y) = x^2y \cos(xy)$ . Bestäm

- $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y)$  och  $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y)$  i punkten  $(x, y) = (1, \pi/2)$ .
- Gradienten  $\nabla f(x, y)$ .
- Totala differentialen  $df$  i punkten  $(x, y) = (1, \pi/2)$ .

2. Vi har potentialen  $\phi(\vec{r}) = -r^2/2$ , där  $\vec{r} = (x, y, z)$  och  $r = |\vec{r}|$  är  $\vec{r}$  vektorns längd (norm).

- Räkna kraftfältet  $\vec{F} = -\nabla\phi$ .
- Är  $\vec{F}$  konservativt?
- Räkna linjeintegralen

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

var  $C$  är en rak linje från origo  $(0, 0, 0)$  till punkten  $(1, 1, 1)$ .

3. Låt  $V \subset \mathbb{R}^3$  vara en rak cirkulär cylinder, med bottenradien  $R$  och höjden  $h$ . Bottenets mittpunkt är i origo och  $z$ -axeln fungerar som symmetriaxel. Beräkna massan för  $V$

$$m = \int_V f dV,$$

när dens massadensitet funktion är  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ .

4. Beräkna totala laddningen  $Q = \int_S \rho dS$  på ytan  $S$ . Ytan  $S$  har parameterrepresentationen

$$\vec{r}(u, v) = e^u \cos(v)\hat{i} + e^u \cos(v)\hat{j} + u\hat{k}, \quad \text{kun } u \in [0, 1], v \in [0, \pi]$$

och laddningsdensiteten  $\rho(u, v) = \sqrt{1 + e^{2u}}$ .

5. Beräkna vektorfältets  $\vec{F}(x, y, z) = (4xz, -y^2, yz)$  flöde genom kubens yta  $S$ .

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [0, 1], y \in [0, 1], z \in [0, 1]\}$$

(Tips: Divergenssatsen)

VÄND!

## Formelsamling

Integralen för vektorfältet  $\vec{V}(x, y, z)$  längs kurvan  $C$

$$W = \int_C \vec{V}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt ,$$

där parameterrepresentation för kurvan  $C$  är  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ .  
Vektorfältets  $\vec{F}$  flöde genom ytan  $S$  kan skrivas som:

$$\int_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \int_D \vec{F} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) dA ,$$

var  $\vec{r}(u, v)$  är parametriseringen för ytan  $S$  och området  $D$  är parametrarnas  $(u, v)$  definitionsmängd.

Divergenssatsen :

$$\oint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \int_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV$$

Stokes sats:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS.$$

Polära koordinater:

$$x = r \cos \phi , \quad y = r \sin \phi , \quad dx dy = r dr d\phi$$

Sfäriska koordinater:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \\ dx dy dz &= r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \end{aligned}$$

Cylindriska koordinater:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \\ z &= z \\ dx dy dz &= \rho d\rho d\phi dz \end{aligned}$$



# Matematiska hjälpmedel III - 2023, sluttent

R. Paatelainen

10 mars 2023

## Instruktioner:

- Tenttid 4h (kl. 09-13:00).
- Besvara alla fem frågor.
- Gör varje uppgift på ett skilt papper. Skriv ditt namn och studentnummer på VARJE svars-papper.

1. Låt  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  vara ett skalärfält  $\phi(x, y, z) = y^2 + \sin(x)$  samt  $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ett vektorfält  $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, xy, e^x + z)$ . Beräkna

- Skalärfältets  $\phi$  gradient  $\nabla\phi$ .
- Vektorfältets  $\vec{F}$  divergens  $\nabla \cdot \vec{F}$ .
- Vektorfältets  $\vec{F}$  rotor  $\nabla \times \vec{F}$ . Är det givna vektorfältet konservativt?

2. Låt kraftfältet vara  $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ . Hur mycket arbete krävs det för att flytta kroppen från origo  $(0, 0, 0)$  till punkten  $(2, 4, 8)$ ?

- längs en rak linje?
- längs kurvan  $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ ?

Du fick samma svar i (a)- och (b)-delen . Förklara resultatet med hjälp av vektorfältens egenskaper.

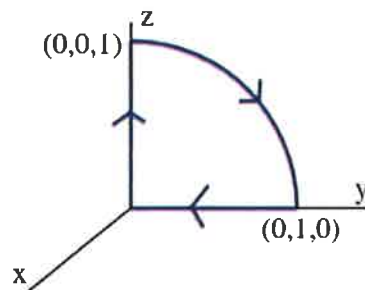
3. Beräkna arean på den delen av ytan  $2x + 3y + 6z = 9$  som befinner sig i cylindern  $x^2 + y^2 = 7$ .

4. Beräkna vektorfältets  $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z^2)$  flöde uppåt genom den parametriserade ytan

$$\vec{r}(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), u),$$

då  $u \in [0, 4]$  samt  $v \in [0, \pi]$ .

5. Låt  $C$  vara den slutna kurvan som syns i bilden



Låt vektorfältet vara  $\vec{F} = (y, z, x)$ . Beräkna kurvintegralen  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  genom att använda Stokes sats. **Tips:** Det räcker att välja vilken som helst slutna yta  $S$ , vars gränslinje  $\partial S$  är positivt riktad (alltså gränslinjen samt ytans enhetsnormal  $\vec{n}$  bildar ett system där högerhandsregeln gäller).

VÄND!

## Formelsamling

Integralen för vektorfältet  $\vec{V}(x, y, z)$  längs kurvan  $C$

$$W = \int_C \vec{V}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt ,$$

där parameterrepresentation för kurvan  $C$  är  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ .  
Vektorfältets  $\vec{F}$  flöde genom ytan  $S$  kan skrivas som:

$$\int_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \int_D \vec{F} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) dudv ,$$

var  $\vec{r}(u, v)$  är parametriseringen för ytan  $S$  och området  $D$  är parametrarnas  $(u, v)$  definitionsmängd.

Divergenssatsen :

$$\oint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \int_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV$$

Stokes sats:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS .$$

Polära koordinater:

$$x = r \cos \phi , \quad y = r \sin \phi , \quad dx dy = r dr d\phi$$

Sfäriska koordinater:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \\ dx dy dz &= r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi . \end{aligned}$$

Cylindriska koordinater:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \\ z &= z \\ dx dy dz &= \rho d\rho d\phi dz . \end{aligned}$$

1. Skissa den klassiska Maxwell-Boltzmann fördelningen för partikel hastigheter i en  $(n(v_x))$  och tre  $(n(v))$  dimensioner. Beskriv de centrala skillnaderna och förklara varifrån de uppkommer. Vad är skillnaden mellan begreppen medelhastighet och rms-hastighet?
2. Visa att vid hög temperatur – d.v.s. då  $k_B T \gg \hbar\omega$  – så är partitionsfunktionen för en simple harmonisk oskillator

$$Z \approx \frac{1}{\beta \hbar \omega}. \quad (1)$$

Ta reda på  $U$ ,  $C_V$ ,  $F$ ,  $S$  för oskillatorn vid hög temperatur.

3. Om partitionsfunktionen för en gas av  $N$  identiska partiklar är  $Z_N = Z_1^N / N!$ , där  $Z_1$  är enpartikelpartitionsfunktionen, visa att den kemiska potentialen är

$$\mu = -kT \ln \left( \frac{Z_1}{N} \right) \quad (2)$$

Ni kan ha nytta av Stirlings formel  $\ln(N!) \approx N \ln(N) - N$

4. Visa att då nollpunktsenergin ignoreras så ges partitionsfunktionen för en gas av fotoner i volymen  $V$  av

$$\ln(Z) = -\frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty d\omega \omega^2 \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega}) \quad (3)$$

Då partiell integrering av uttrycket i Ekv. (3) ger

$$\ln(Z) = \frac{V \pi^2 (kT)^3}{45 \hbar^3 c^3} \quad (4)$$

visa att

(a)

$$F = -\frac{4\sigma VT^4}{3c} \quad (5)$$

$$S = \frac{16\sigma VT^3}{3c} \quad (6)$$

$$U = \frac{4\sigma VT^4}{c} \quad (7)$$

$$p = \frac{4\sigma T^4}{3c} \quad (8)$$

5. Beskriv Bose-Einstein och Fermi-Dirac distributionerna och förklara skillnaderna. Vad är skillnaderna mellan partiklar som följer Bose-Einstein distributionen och Fermi-Dirac distributionen? Ge två exempel var. (ca. 1 sida)
6. Beräkna fria medelvägen för  $N_2$  molekyler vid rumstemperatur i en vakumkammare där trycket är  $10^{-10}$  mbar. Du kan anta att radien för en  $N_2$  molekyl är 0.18 nm. Beräkna också tiden i medeltal mellan kollisioner (du kan anta att medelhastigheten är  $\langle v \rangle = 475 \text{ m s}^{-1}$ ). Kammaren har en diameter på 0.5 m. Hur ofta träffar partiklarna väggarna i medeltal? Jämför detta med hur ofta partiklarna kolliderar med andra partiklar. Om man plötsligt ökar trycket till  $10^{-6}$  mbar, hur påverkas dessa resultat?

1. Skissa den klassiska Maxwell-Boltzmann fördelningen för partikel hastigheter i en  $(n(v_x))$  och tre  $(n(v))$  dimensioner. Beskriv de centrala skillnaderna och förklara varifrån de uppkommer. Vad är skillnaden mellan begreppen medelhastighet och rms-hastighet?
2. Om partitionsfunktionen för en gas av  $N$  identiska partiklar är  $Z_N = Z_1^N/N!$ , där  $Z_1$  är enpartikelpartitionsfunktionen, visa att den kemiska potentialen är

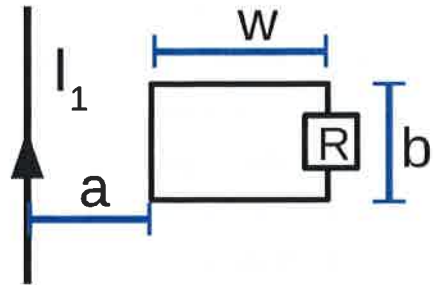
$$\mu = -kT \ln \left( \frac{Z_1}{N} \right) \quad (1)$$

Du kan ha nytta av Stirlings formel  $\ln(N!) \approx N \ln(N) - N$

3. a) Förklara begreppet virialutveckling. Hur ser den ut och vad har den för innebörd? Vad är virialkoefficienterna? (3p)  
b) Vad beskriver Van der Waals ekvationen? Vad grundar sej härledningen på? Vad menas med den kritiska punkten, och hur bestäms den? (3p)
4. Beskriv Bose-Einstein och Fermi-Dirac distributionerna, och förklara skillnaderna mellan dessa, samt konsekvenserna av det. Vilka grundantagande gör man, och vad baserar sej härledningarna på? Ge dessutom två exempel var, av system som följer vardera distributionen. (ca. 1 sida)
5. Beräkna fria medelvägen för  $N_2$  molekyler vid rumstemperatur i en vakumkammare där trycket är  $10^{-10}$  mbar. Du kan anta att radien för en  $N_2$  molekyl är 0.17 nm. Beräkna också tiden i medeltal mellan kollisioner (du kan anta att medelhastigheten är  $\langle v \rangle = 485 \text{ m s}^{-1}$ . Kammaren har en diameter på 0.5 m. Hur ofta träffar partiklarna väggarna i medeltal? Jämför detta med hur ofta partiklarna kolliderar med andra partiklar. Om man plötsligt ökar trycket till  $10^{-6}$  mbar, hur påverkas dessa resultat?

- 1) En mycket lång, rak dielektrisk cylinder har laddningen jämnt fördelat i hela volymen,  $\rho$  är laddning per volymenhet ( $\rho = C/m^3$ ). Cylindern är i vakuum och har radien  $R$ . Beräkna det elektriska fältet vinkelrät mot cylinderns sidor som en funktion av avståndet  $r$  från cylinderns axel med hjälp av Gauss lag. laddning jämnt fördelat=varaus tasaisesti jakautunut

- 2) En mycket lång ledning har en ström  $I_1$  uppåt som minskar med tiden. I närheten finns en rektangulär trådslinga som innehåller ett motstånd  $R$  (motståndet i resten av slingan är försumbar jämfört med  $R$ ).



- a) Kommer strömmen  $I_2$  i trådslingan att gå med- eller mot-sols? Förklara varför.

- b) Visa att strömmen  $I_2$  i trådslingan blir: 
$$I_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(2b) \ln[(a+w)/a]}{R} \frac{dI_1}{dt}$$

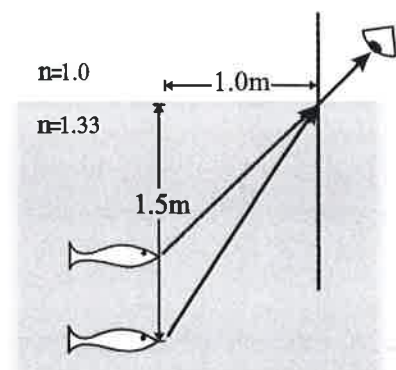
ledning=johto, innehåller=sisältää, motstånd=vastus, försumbar=voidaan unohtaa, med- eller motsols= myötä- tai vastapäivään, visa att=näytä

- 3) Förklara följande frågor:

- Vad är elektromagnetiska (EM) vågor och vilka ekvationer beskriver dem.
- Hur uppkommer EM-vågor.
- Hur växelverkar EM-vågorna med andra EM-vågor.
- Hur växelverkar EM-vågor med materia.

beskriver=kuvailee, uppkommer=muodostuu, växelverkar=vuorovaikuttaa

- 4) En liten fisk finns på djupet 1.5 m. På vilket djup verkar fisken vara sett med fiskarens ögon, se bild? Vattnets brytningsindex är 1.33 och luftens 1.0



djupet=syvyydellä, verkar fisken vara=vaikuttaa kala olevan, brytningsindex=taitekerroin

5) Du befinner dig i tomma rymden 15 m från ditt rymdskepp. Både du och rymdskeppet står stilla. Lyckligtvis har du en 200 W ficklampa med dig, som du använder som en 'ljusraket' för att ta dig tillbaka till rymdskeppet.

a) Ifall du väger 80 kg, din rymddräkt 50 kg och din ficklampa 2 kg, hur länge räcker det innan du når rymdskeppet?

b) Finns det något annat sätt du kan använda lampan för att nå rymdskeppet?

tomma rymden=tyhjässä avaruudessa, skepp=alus, står stilla=seistä paikallaan, dräkt=puku, hur länge räcker det=kuinka kauan se kestää, annat sätt=toinen tapa, nå rymdskeppet=päästä avaruusalukselle

6) En violin med en sträng, som är 316 mm lång och vars massa per längdenhet  $\mu = 0.65\text{g/m}$ , är placerad nära en högtalare kopplad till en ljudoscillator med variabel frekvens.

a) Bestäm spänningen i strängen, då vi har resonansfenomen i strängen vid frekvenserna 880 Hz och 1320 Hz, när oscillatorns frekvens varierar kontinuerligt inom området 700 till 1500 Hz.

b) Vilken är strängens grundfrekvens?

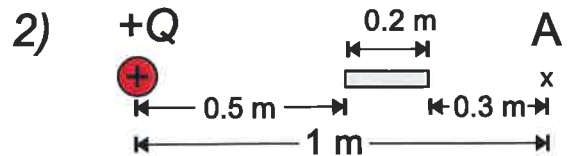
sträng=kieli, placerad nära en högtalare=lähellä kovaäänistä, kopplad till=yhdistetty, spänningen=jännitys, grundfrekvens=perustaajuus

1. En positiv laddning,  $Q = 10^{-10}$  C, gör ett elektriskt fält runt sig.  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$

a) Beräkna det elektriska fältet i punkten A som är 1.0 m från laddning Q, se bild 1)

b) Vi sätter en 0.2 m lång rak metalltråd som i bild 2) mellan laddningen och punkten A. Vad är nu det elektriska fältet i punkten A som kommer endast från laddning Q?

c) Vad är det totala elektriska fältet i punkten A från laddningen Q och metalltråden?



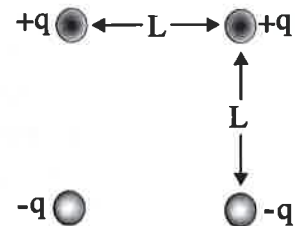
runt sig=ympärilleen, metalltråd=metallilanka

2. Laddningarna befinner sig i hörnen av en kvadrat med sidan  $L$ .

a) Beräkna det arbete som måste utföras (energi som krävs) för att upplösa systemet (laddningarna förs oändligt långt från varandra).

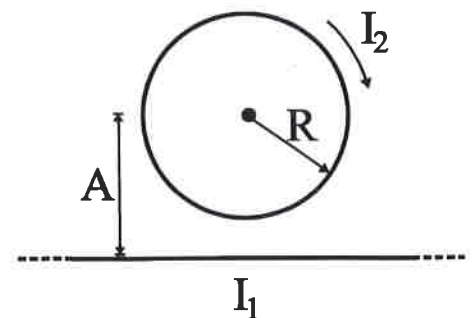
b) Förklara med hjälp av resultatet i a) att det finns joniska gitterstrukturer (Ex. NaCl). Om du får byta laddningarnas platser, vad är den lägsta energikonfigurationen du kan få?

c) Beräkna det arbete som måste utföras för att föra en extra laddning  $+Q$  till kvadratens mittpunkt i bilden.



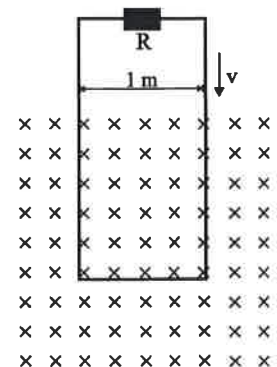
laddning=varaus, utföras=tehdä, upplösa systemet=hajottaa systeemi, oändligt långt från varandra=äärettömän kauas toisistaan, gitterstrukturer=kiderakenteita

3. En cirkulär ledning har radien  $R$  och en ström  $I_2$  som går medsols (se bild). Cirkelns mittpunkt ligger på avståndet  $A$  från en oändligt lång rak ledare. Vad måste strömmens riktning och storlek  $I_1$  vara i den långa raka ledaren, så att det totala magnetiska fältet i cirkelns mitt är noll?



ledning=johto, ligger på avståndet=on etäisyydellä, oändligt lång=äärettömän pitkä, riktning=suunta

4. En lång rektangulär strömslinga, parallell med det vertikala planet, har bredden 1.0 m. Den rör sig med konstant fart nedåt i ett homogent horisontellt magnetfält med värdet 0.50 T. Slingans massa är 250 g och dess resistans är 2.0  $\Omega$ . Slingans nedre ända är inne i fältet, men inte dess övre ända. Beräkna slingans fart nedåt.



rektangulär strömslinga=suorakulmioinen piiri, planet=taso, bredden=leveys, fart=nopeus



5. a) Hur påverkas material av yttre magnetfält och vilka olika magnetiska material finns det?

b) Man sätter två stavar mellan en stark magnetisk syd- och nordpol, se figuren. Ifall en av stavarna är paramagnetisk och den andra diamagnetisk, kommer stavarna att repellera eller attrahera varandra, eller blir det ingen kraft mellan stavarna? (motivera ditt svar)



påverkas=vaikuttaa, stavar=sauva

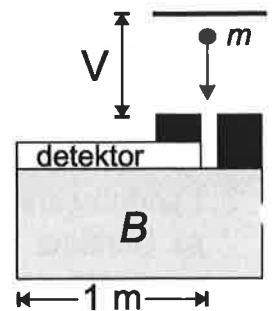
6. En masspektrometers accelerationsspänning är 30 kV och längden på den platskänsliga detektorn är 1.0 m, se bild. Vi har ett magnetfält  $B$  som böjer jonerna i det grå området.

a) I vilken riktning måste  $B$  vara så att positiva joner böjs till vänster i bilden?

b) Hur stort måste det magnetiska fältet minst vara för att man kan mäta en gång joniserade (laddning  $+e$ ) uran isotoperna  $U^{235}$  och  $U^{238}$ ?

c) Vad är avståndet mellan isotopernas platser där de träffar den platskänsliga detektorn med magnetfältets storlek från b)-fallet?

$$M(U^{235}) = 3.903 \times 10^{-25} \text{ kg}, M(U^{238}) = 3.953 \times 10^{-25} \text{ kg}, |e| = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$$



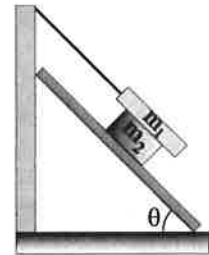
platskänslig=paikkaherkkä, i vilken riktning=mihin suuntaan, böjs=kaartua, minst vara=vähintään olla

## Växelverkningar och kroppar, Sluttent, 20.10.2020

Man får använda miniräknare, matematik och fysik tabellböcker och en egen luntlapp

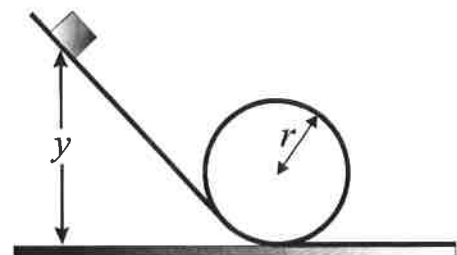
- 1) Två stenar kolliderar i yttre rymden. Före kollisionen har första stenen massan 20 kg och hastigheten  $\langle 3800, -2700, 3000 \rangle$  m/s och andra stenen massan 15 kg och hastigheten  $\langle -450, 2000, 3200 \rangle$  m/s. Under kollisionen lossnar en 4 kg bit av den första stenen som fastnar i den andra stenen. Efter kollisionen har den första stenen (nu med massan 16 kg) hastigheten  $\langle 1400, 200, 1700 \rangle$  m/s. Vad är hastigheten för den andra stenen efter kollisionen?  
yttre rymden=ulkoavaruus, lossnar=irtoaa, bit=pala, fastnar=kiinnittyy

- 2) Ett block med massan  $m_2 = 3$  kg glider nedför ett lutande plan ( $\theta = 45^\circ$ ) med konstant hastighet. På blocket ligger en bräda med massan  $m_1 = 1$  kg som är fäst med ett rep i väggen.  
a) Rita all krafterna som påverkar blocket  $m_2$ .  
b) Bestäm den kinetiska friktionskoefficienten ifall den är samma mellan alla ytorna.  
block=palikka, lutande plan=kalteva taso, tråden=naru



- 3) a) Du vill planera och bygga en byggnad som är så energieffektiv i fråga om uppvärmning som möjligt. Vilka fysikaliska effekter skall man ta i beaktande?  
b) En vinternatt då temperaturen inne i ett hus var  $20^\circ\text{C}$  och utomhus  $-5^\circ\text{C}$  gick det åt 40 kWh (kilowatt-timmar) elektrisk energi på 8 timmar. Vad var medel energieffekt förlusten (J/s) genom husets väggar (inkluderat tak och golv)?  
c) Värmeeffekten med vilken energi överförs mellan två system är oftast proportionellt till systemens temperaturskillnad. Om man antar att detta stämmer i b) fallet så hur många kWh elektrisk energi skulle ha förbrukats om innetemperaturen i stället skulle ha varit  $25^\circ\text{C}$ ?  
bygga=rakentaa, i fråga om uppvärmning=kyseessä on lämmitys, som möjligt=kuin mahdollista, beakta=ottaa huomioon, förlusten=häviö, överförs=siirtyy, om man antar=jos oletetaan, förbruka=kuluttaa

- 4) En kropp glider nedför en friktionsfri bana. Banans nedre del har en cirkelslinga med radien  $r$  (se figuren). Vid vilken minimihöjd  $y$  relativt till banans lägsta punkt bör kroppen starta från vila för att gå längs cirkeldelen av banan och hela tiden vara i kontakt med banan?  
nedför=alas, nedre del=alempi osa, cirkelslinga=silmukka, lägsta punkt=alin piste, bör=pitäisi, från vila=levosta



5) Finland använde år 2018 ca 67 TWh elektrisk energi (~11 MWh/person).

a) Beräkna hur många kg kol man måste förbränna (och hur mycket koldioxid bildas), för att göra denna mängd elektrisk energi.

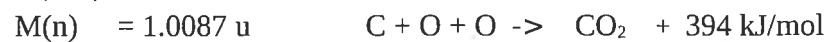
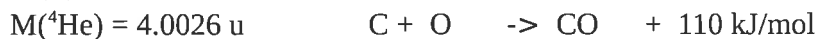
b) Ifall man kunde använda fusionsenergi där väteisotoperna tritium (T) och deuterium (D) fusioneras till att producera denna energimängd, hur många kg T och D skulle gå åt?

c) Vad är den minsta mängd materia man måste använda för att producera denna energimängd? På vilket sätt kunde detta vara möjligt?

använde=käytti, kol=hiili, förbränna=polttaa, bildas=muodostuu, mängd=määrä, väte=vety

$$M(D) = 2.0141 \text{ u} \quad u = 1.66057 \times 10^{-27} \text{ kg} \quad 1 \text{ mol} = 12 \text{ g C} = 16 \text{ g O}$$

$$M(T) = 3.0166 \text{ u} \quad c = 3e8 \text{ m/s} \quad 1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$$



6) Anta att vi har anledning att misstänka att ett visst kvantobjekt har endast tre kvanttillstånd. När vi exciterar ett sådant objekt, konstaterar vi att den avger elektromagnetisk strålning med tre olika energier: 2.48 eV (grön), 1.91 eV (orange), och 0.57 eV (infraröd).

a) Ge två olika exempel på hur energinivåerna för detta system kan se ut.

b) Förklara hur man genom att använda en absorptionsmätning, kan bestämma vilket av de två olika föreslagna energinivåsscheman för systemet är det rätta.

Anta=oleta, anledning=syy, misstänka=epäillä, kvanttillstånd=kvantttila, excitera=virittää, strålning=säteily, energinivå=energiataso, mätning=mittaus, föreslagna=ehdotetut, schema=kaavio, rätta=oikea

Skriv ditt namn och studienummer på alla papper.

Man får ha med en ensidig luntlapp och räknare utan nätförbindelse på provet

1. Förklara kort:
  - a) Egentid
  - b) Ljuskon
  - c) Inertialt koordinatsystem. Ge exempel på ett koordinatsystem som inte är ett inertialsystem.
2. En 1 meter lång linjal far väldigt fort förbi dej i ditt vilokoordinatsystem. Du observerar dess längd som  $1/3$  meter. Vad är då dess hastighet i förhållande till dej?
3. Galax  $A$  rör sig från oss med hastigheten  $0.5c$ . Galax  $B$  befinner sig i precis motsatt riktning och rör sig också från oss med hastigheten  $0.5c$ . Vilken hastighet uppmäter en invånare i  $A$  att a) vår galax har b) galax  $B$  har?
4. En elektron i rörelse krockar i ett laboratorium med en elektron i vila så att det bildas 3 elektroner och 1 positron:

$$e^- + e^- = e^- + e^- + e^- + e^+.$$

Både elektronens och positronens massor är samma,  $m_e$ . Visa att elektronen som ursprungligen rörde sej i laboratoriet hade en totalenergi på åtminstone  $7m_e c^2$  för att ovan nämnda process ska kunna vara möjlig.

Tips: hur ser det ut i masscentrums koordinatsystem? Undersök partiklarnas fyr-rörelsemängds summa och dess punktprodukt med sej själv. Märk att elektroner och positroner som bildas vid minimienergi är i vila i masscentrums koordinatsystem. Elektromagnetisk eller andra liknande växelverkningar behöver inte beaktas.

5. En partikel rör sig i inertialkoordinatsystemet  $K$  i  $x$ -axelns riktning med den tidsberoende hastigheten  $v(t) = c\sqrt{1 - (t_0/t)^4}$ , där  $t_0 \leq t < \infty$ : i början,  $t = t_0$  är partikeln alltså i vila, och den accelererar så att  $v \rightarrow c$  om  $t \rightarrow \infty$ .  
Vad är partikelns egentid  $\tau$ , dvs den tid som en klockan som rör sig med partikeln skulle visa vid tidpunkten  $t$ ? Sätter  $\tau = 0$  i början, dvs då  $t = t_0$ .  
Vad händer om  $t \rightarrow \infty$ ?

# Relativitetsteorins grunder 2019 – Tentamen

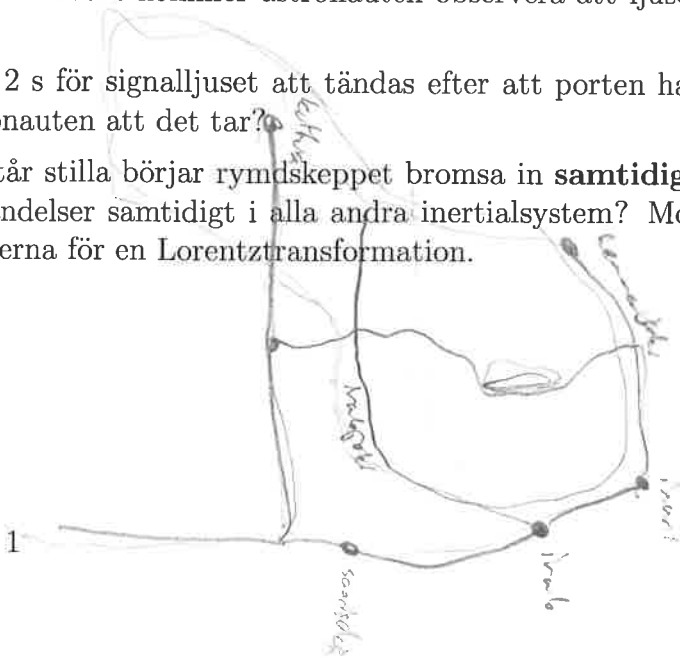
10 maj 2019 kl. 10–14 i Physicum D114

**Viktig information!** Läs detta först:

- Denna tentamen har sju frågor. **Välj ut och svara på endast fem (5) av dessa!** Var tydliga med vilka fem frågor du väljer att besvara — om det inte är tydligt kommer de frågor med högst poäng att strykas tills fem återstår!
- Varje fråga är värd 6 poäng. Som mest kan man alltså få 30 poäng totalt.
- Ni har fyra timmar på er att besvara frågorna (48 minuter per fråga).
- Skriv namn, studentnummer, kursnamn (RG) samt datum (10.5.2019) på varje löst papper.
- Ni får använda en miniräknare (ej något med en internetanslutning som t.ex. en mobil).
- Ni får ha med er en handskriven dubbelsidig A4 med valfria anteckningar.
- På sista sidan (sida 4) finns en formelsamling med några viktiga ekvationer.

**Lycka till!**

- 
1. En astronaut är på väg mot en rymdstation för att parkera sitt rymdskepp i stationens hangar. Skeppet, vars egenlängd är 75 m, rör sig med hastigheten  $0,8c$  jämfört med hangaren.
- I ett koordinatsystem där rymdskeppet står stilla uppmäter astronauten att hangaren är 48 m lång. Vad är hangarens egenlängd? Kan rymdskeppet få plats i hangaren när det står stilla jämfört med hangaren?
  - Vid hangarens port finns ett signalljus som lyser grönt (frekvens  $\approx 550 \times 10^{12}$  Hz) om porten till hangaren är öppen. Vilken frekvens kommer astronauten observera att ljuset har?
  - Enligt personerna i hangaren tar det 2 s för signalljuset att tändas efter att porten har öppnats. Hur lång tid uppmäter astronauten att det tar?
  - I ett koordinatsystem där hangaren står stilla börjar rymdskeppet bromsa in **samtidigt** som signalljuset tänds. Sker dessa händelser samtidigt i alla andra inertialsystem? Motivera ditt svar med hjälp av ekvationerna för en Lorentztransformation.



2. Svara **kort** på följande frågor.

- (a) Vilka är de **två postulat** som ligger till grund för den speciella relativitetsteorin?
- (b) Vad menas med **egentiden** längs en världslinje?
- (c) Ge **en anledning** till att inget kan färdas snabbare än  $c$  enligt speciell relativitetsteori.
- (d) Hur snabbt färdas en **masslös** partikel?
- (e) Varför är ett svart håls **händelsehorisont** en speciell plats?
- (f) Hur kan vi observera att universum **expanderar**?

3. En fysiker använder ett visst koordinatsystem och uppmäter följande två 4-vektorer:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_t \\ a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ 3\sqrt{2}c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_t \\ b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ \sqrt{15} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (a) 4-vektorn  $\mathbf{a}$  är ett rymdskepps 4-hastighet. Vad är 4-hastighetens  $t$ -komponent  $a_t$ ? (Komponenten bör vara **positiv**.)
  - (b) Vad är  $x$ -komponenten av rymdskeppets "vanliga" hastighet  $v_x = dx/dt$  i detta koordinatsystem?
  - (c) 4-vektorn  $\mathbf{b}$  är en partikels 4-rörelsemängd. Komponenterna har enheten MeV/ $c$ , alltså t.ex.  $b_t = 8$  MeV/ $c$ . Vad är partikelns massa och hastighet?
  - (d) Vad är partikelns energi i ett koordinatsystem där rymdskeppet står stilla?
4. Den galaktiska polisen utreder ett brott. Något slags vapen har använts för att förstöra en fredlig himlakropp. Förstörelsen ägde rum vid koordinaterna

$$F: (ct, x, y, z) = (5, -1, 0, 15) \text{ ljusår.}$$

Tre misstänkta kan snabbt identifieras, vid namn Alice, Bob och Charlie (A, B och C). De misstänkta — galna vetenskapsmän allihopa — har alla observerats avfyra avancerade vapen i sina laboratorier runtom i galaxen. Dessa misstänkta observationer ägde rum vid följande koordinater:

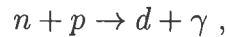
$$A: (ct, x, y, z) = (-14, 7, 8, -1) \text{ ljusår.}$$

$$B: (ct, x, y, z) = (3, -2, 0, 15) \text{ ljusår.}$$

$$C: (ct, x, y, z) = (-2, -1, 0, 10) \text{ ljusår.}$$

- (a) Rita ett rumtidsdiagram som visar alla fyra händelsers  $x$ - och  $ct$ -koordinater. Rita också in ljuskonen för den första händelsen (förstörelsen av asteroiden).
- (b) Beräkna de **tre** rumtidsintervallen mellan förstörelsen F och de misstänkta observationerna A, B, och C. Är intervallen tids-, rums- eller ljuslika?
- (c) Vilken av händelserna A, B, C kan **inte** ha orsakat förstörelsen? Förklara varför.
- (d) Lite senare får polisen ytterligare information: Ingen av de misstänkta har haft tillgång till vapen eller annan utrustning som kan färdas snabbare än  $0,6c$ . Vilken av de tre observationerna **kan** ha orsakat förstörelsen?

5. En neutron ( $m_n = 940 \text{ MeV}/c^2$ ) vars totala energi är 2210 MeV rör sig längs den positiva  $x$ -riktningen. Den kolliderar med en proton ( $m_p = 938 \text{ MeV}/c^2$ ) som rör sig i den negativa  $x$ -riktningen med hastigheten  $0,97c$ . De två partiklarna bildar en deuteriumkärna och avger en foton. Detta kan skrivas som



där  $\gamma$  symboliserar fotonen (inte Lorentzfaktorn).

- Vad är neutronens 4-rörelsemängdsvektor före kollisionen?
  - Vad är protonens 4-rörelsemängdsvektor före kollisionen?
  - Efter kollisionen uppmäts fotonens energi till ungefär 1940 MeV och den rör sig i den **positiva**  $x$ -riktningen. Använd 4-rörelsemängdens bevarande för att beräkna deuteriumkärnans massa.
6. Vi vill använda Schwarzschildlösningen för att beräkna hur klockor påverkas av jordens gravitation. Linjeelementet är

$$ds^2 = c^2 (1 - K) dt^2 - (1 - K)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 , \quad (1)$$

där

$$K = \frac{2GM}{c^2 r} . \quad (2)$$

Jordens massa är  $M = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$ , och gravitationskonstanten  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ .

- En observatör står stilla (konstant  $r$ ,  $\theta$  och  $\phi$ ). Härled en ekvation för egentiden  $\tau$  som denna observatör uppmäter som en funktion av  $K$  och koordinattiden  $t$ .
  - Använd denna ekvation för att visa att egentiden som en sådan observatör uppmäter är lika med koordinattiden om observatören står väldigt ( $\approx$  oändligt) långt borta från jorden.
  - För radier  $r$  nära jordytan är  $K$  ett väldigt litet tal. Expandera därför ekvationen för små  $K$  (sätt  $K^2$  och högre potenser till 0).
  - Jordens radie är ungefär 6371 km. En GPS-satellit befinner sig 20 000 km ovanför jordytan. Använd ekvationen från (c) för att beräkna skillnaden i tiden som uppmäts av en person på jordytan,  $\tau_J$ , och tiden som uppmäts av satelliten,  $\tau_S$ , under 5 s koordinattid. OBS: Antag alltså att både personen och satelliten befinner sig på konstant  $r$ ,  $\theta$  och  $\phi$ !
7. FLRW-linjeelementet som beskriver ett expanderande universum (med  $k = 0$ ) är

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) . \quad (3)$$

- Vad är den kosmologiska principen och vad har den att göra med detta linjeelement?
- Härled Hubbles lag  $v = Hd$  från FLRW-linjeelementet. Vad är Hubbleparametern (Hubblekonstanten) som funktion av skalfaktorn  $a(t)$ ?  
(Tips: Du kan anta att en galax befinner sig på  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  och den andra på  $(x, y, z) = (x, 0, 0)$ . Skriv först ner ett uttryck för avståndet  $d$  mellan dessa två galaxer som en funktion av tiden, och ta sedan derivatan av detta avstånd för att beräkna hastigheten  $v$ .)
- Hubbleparameterens värde i nutid är  $H \approx 2 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$ . Enligt Hubbles lag, hur långt borta måste en galax vara för att hastigheten den rör sig ifrån oss ska vara lika med ljusets hastighet? Ge svaret i megaparsec ( $1 \text{ Mpc} \approx 3 \times 10^{22} \text{ m}$ ).

# Formelsamling

Ljusets hastighet  $c \approx 3 \times 10^8$  m/s.

**Lorentzfaktorn:**  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$  (4)

**Tidsdilatation:**  $\Delta t' = \gamma \Delta t$  (5)

**Längdkontraktion:**  $L' = \frac{L}{\gamma}$  (6)

**Dopplereffekten för ljus:**  $f_o = \sqrt{\frac{1 \pm u/c}{1 \mp u/c}} f_K$  (7)

{ övre tecknen:  $K$  &  $O$  rör sig mot varandra  
{ undre tecknen:  $K$  &  $O$  rör sig från varandra

**Lorentztransformationen:** 
$$\begin{cases} t' &= \gamma \left( t - \frac{u}{c^2} x \right) \\ x' &= \gamma (x - ut) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases}$$
 (8)

**Transformation av hastigheter:** 
$$\begin{cases} v'_x &= \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} \\ v'_y &= \frac{v_y}{\gamma(1 - uv_x/c^2)} \\ v'_z &= \frac{v_z}{\gamma(1 - uv_x/c^2)} \end{cases}$$
 (9)

**Transformation av en 4-vektor:**  $\mathbf{a}' = \Lambda \mathbf{a}$  med  $\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{u}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{u}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  (10)

**Rumtidsintervallet:**  $(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$  (11)

**4-rörelsemängd:**  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$  med  $\begin{cases} E = \gamma mc^2 \\ p_x = \gamma mv_x \\ p_y = \gamma mv_y \\ p_z = \gamma mv_z \end{cases}$  (12)

**Mer om energi och rörelsemängd:**  $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$  och  $|\vec{v}| = \frac{|\vec{p}|}{E} c^2$  (13)

(14)



# Relativitetsteorins grunder 2022 – Tentamen

Onsdag 11 maj 2022 kl. 10:00–14:00

**Viktig information!** Läs detta först:

- Denna tentamen har fem frågor. Varje fråga är värd 6 poäng. Som mest kan man alltså få 30 poäng totalt.
- Ni har fyra timmar på er att besvara frågorna.
- Som vanligt måste ni härleda ekvationer och förklara era uträkningar med utgångspunkt från det vi gått igenom i kursen.
- Skriv namn på varje löst papper.
- Ni får använda en miniräknare (ej något med en internetanslutning som t.ex. en mobil).
- Ni får ha med er en dubbelsidig A4 med valfria anteckningar.
- På sista sidan finns en formelsamling med några viktiga ekvationer.
- Om ni har frågor, tveka inte att fråga!

Lycka till!

## 1. Blandade frågor - speciell relativitet

- Ett rymdskepp startar, färdas 0,5 ljusår med hastigheten  $\frac{8}{10}c$ , och stannar. Vad är rumtidsintervallet för färden?
- Ett objekt har längden 4 m i sitt vilosystem. Hur långt är det enligt en observatör som rör sig med hastigheten  $0,5c$ ?
- Vad är en **ljuskon**? Varför är ljuskoner viktiga inom speciell relativitet?
- En partikel har energin 5 GeV och den totala rörelsemängden  $2 \text{ GeV}/c$ , i ett visst koordinatsystem. Vad är partikelns massa i dess vilosystem?
- Om du har en 4-vektor  $A$ , hur kan du bilda något invariant från den?
- Vad är den "vanliga" hastigheten  $v_x = dx/dt$  för ett föremål med följande 4-hastighet:

$$a \frac{\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}} \sqrt{1 + \frac{v_x^2}{c^2}}}{\sqrt{1 + \frac{v_x^2}{c^2}}}$$

$$U = c \begin{pmatrix} \sqrt{19} \\ 3\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1

$$a \sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}} = v_x$$

$$a = \frac{v_x}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{v_x^2}{c^2}}}{\sqrt{1 + \frac{v_x^2}{c^2}}}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

## 2. Blandade frågor - allmän relativitet och kosmologi

- Innan allmän relativitet formulerades var Newtons gravitationslag den bästa teorin för gravitation. Varför är denna lag problematisk med tanke på det vi lärt oss om speciell relativitetsteori?
- Nämn och förklara kort ett fenomen som är en konsekvens av (den starka) ekvivalensprincipen och tankeexperimentet "Einsteins hiss".
- Vad menas med "återkombination" inom kosmologi, och vad har det att göra med den kosmiska bakgrundsstrålningen?
- Vi diskuterade tre olika former av energi inom kosmologi: vanlig materia, strålning, och mörk energi. Vilken av dessa var viktigast ("dominerade") i det tidiga universum? Varför?

## 3. Två fysiker och en pulsar

Pulsarer är en typ av stjärnor som avger pulser med ljus med *regelbundna* intervall. Två fysiker, Alice och Bob, observerar en sån pulsar. Men medan Bob står stilla jämfört med pulsaren så rör sig Alice: Hon börjar på samma plats som Bob, färdas först med hastigheten  $v = \frac{8}{10}c$  mot pulsaren i 10 år (hon når inte fram till den), och slutligen med samma hastighet tillbaka till Bob. När hon återvänder har hon alltså upplevt att 20 år har gått.

- Hur länge upplever Bob att Alices resa tog?
- Rita ett *stort och tydligt* rumtidsdiagram över händelseförloppet, inklusive Alice, Bob och pulsaren.
- Rita ut några av ljuspulserna som Alice och Bob ser på ditt rumtidsdiagram (du kan rita ett nytt diagram om det är enklare). Förklara med hjälp av diagrammet varför Alice och Bob ser *samma* totala antal pulser under händelseförloppet.  
Ser Alice lika många pulser på vägen mot stjärnan som på tillbakavägen?
- Glöm nu bort pulsaren, och tänk er istället att Bob skickar bilder på sig själv till Alice med regelbundna intervall under hennes resa. Alice kan på det sättet se hur Bob åldras. Rita ett nytt rumtidsdiagram som visar dessa bilder, som skickas till Alice som ljuspulser. Ser Bob ut att åldras snabbare på Alices väg mot stjärnan eller på tillbakavägen?

## 4. Att skapa ett par partiklar

En kollision mellan en foton (en masslös ljuspartikel) och en elektron kan resultera i att ytterligare en elektron samt en positron bildas. En positron har samma massa som en elektron,  $m_e = 511 \text{ keV}/c^2$  (keV=kilo-elektronvolt). Processen i fråga är alltså

$$\gamma + e^- \rightarrow e^- + e^+ + e^-$$

där  $\gamma$  symboliserar en foton,  $e^-$  en elektron och  $e^+$  en positron.

Använd ett koordinatsystem där den *totala* rörelsemängden (före och efter kollisionen) är noll.

Vad är den **minsta energi** fotonen behöver ha i detta koordinatsystem för att denna process ska vara möjlig?

**Tips:** Vilken hastighet bör tre partiklar efter kollisionen ha (i detta koordinatsystem) för att minimera energin som krävs för att skapa dem?

## 5. En expanderande sfär

I vår diskussion om allmän relativitetsteori studerade vi ett enkelt exempel på en krökt rumtid: Ytan på en sfär med konstant radie  $R$ . Vi visade att linjeelementet som beskriver denna sfär är

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2 d\theta^2 - R^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (1)$$

där  $\theta$  och  $\phi$  är de vanliga sfäriska vinkelkoordinaterna. Om vi gör en liten ändring kan det här beskriva ett sorts expanderande universum: vi låter radien bero av tiden,  $R = R(t)$ .

Tänk er nu att två varelser lever på den expanderande sfärens yta. De står stilla på samma  $\phi$ -koordinat, men på olika  $\theta$ -koordinater,  $\theta_1$  och  $\theta_2$ .

- Använd linjeelementet (1) för att visa att avståndet mellan de två varelserna vid en viss tidpunkt är  $d = \Delta\theta R(t)$ , där  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ .
- Härled motsvarigheten till Hubbles lag för dessa sfärvarelser, alltså en ekvation som relaterar avståndet  $d$  och hastigheten  $v = \dot{d}$  ( $\dot{d}$  är alltså  $t$ -derivatan av  $d$ ). Vad är Hubbleparametern som funktion av  $R(t)$ ?
- Antag att hastigheten  $v$  är *konstant* i tiden, och att skalfaktorn är 0 vid tiden  $t = 0$ . Vad är då Hubbleparametern som funktion av tiden?
- Om  $v$  är konstant och vi kan mäta Hubbleparametern i nutid, hur kan vi beräkna hur gammalt universum är?

# Formelsamling

Ljusets hastighet  $c \approx 3 \times 10^8$  m/s.

**Lorentzfaktorn:**  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$  (2)

**Tidsdilatation:**  $\Delta t' = \gamma \Delta t$  (3)

**Längdkontraktion:**  $L' = \frac{L}{\gamma}$  (4)

**Dopplereffekten för ljus:**  $f_o = \sqrt{\frac{1 \pm u/c}{1 \mp u/c}} f_K$  (5)

{ övre tecknen:  $K$  &  $O$  rör sig mot varandra  
{ undre tecknen:  $K$  &  $O$  rör sig från varandra

**Lorentztransformationen:** 
$$\begin{cases} t' = \gamma (t - \frac{u}{c^2} x) \\ x' = \gamma (x - u t) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$
 (6)

**Transformation av hastigheter:** 
$$\begin{cases} v'_x = \frac{v_x - u}{1 - u v_x / c^2} \\ v'_y = \frac{v_y}{\gamma (1 - u v_x / c^2)} \\ v'_z = \frac{v_z}{\gamma (1 - u v_x / c^2)} \end{cases}$$
 (7)

**Transformation av en 4-vektor:**  $a' = \Lambda a$  med  $\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{u}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{u}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  (8)

**Rumtidsintervallet:**  $(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$  (9)

**4-rörelsemängd:**  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$  med  $\begin{cases} E = \gamma m c^2 \\ p_x = \gamma m v_x \\ p_y = \gamma m v_y \\ p_z = \gamma m v_z \end{cases}$  (10)

**Mer om energi och rörelsemängd:**  $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$  och  $|\vec{v}| = \frac{|\vec{p}|}{E} c^2$  (11)

(12)

*En handskriven dubbelsidig A4 luntlapp får användas. Denna lämnas in tillsammans med tentsvaren.*

*Kom ihåg att skriva ut motiveringar och mellansteg i beräkningarna ni gör!*

### Uppgift 1.

Förklara, definiera och/eller exemplifiera följande begrepp.

**(1 poäng per begrepp)**

- |                          |                                   |
|--------------------------|-----------------------------------|
| a) Egenvärde             | d) Heisenbergs osäkerhetsrelation |
| b) Schrödingerekvationen | e) Parbildning och annihilation   |
| c) Klotytfunktion        | f) Materievågor                   |

### Uppgift 2.

- Beskriv den fotoelektriska effekten. Hur såg experimentet ut och vad bevisade det? **(2 poäng)**
- Beskriv Comptoneffekten. Vad är processen som undersöks i experimentet? Vad bevisar det om fotoner? **(2 poäng)**
- Kring samma tider som fotonen undersöktes, debatterades också atomens struktur, där ett förslag (som visade sig vara rätt) var att negativt laddade elektroner i en atom kretsade kring en positivt laddad kärna. Beskriv ett experiment som bevisade denna hypotes. **(2 poäng)**

### Uppgift 3.

En partikel i en endimensionell låda med oändligt höga kanter är bunden till intervallet  $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$  och befinner sig i sitt första exciterade tillstånd. Beräkna sannolikheten för att finna partikeln i subintervallet  $\left[\frac{a}{8}, \frac{3a}{8}\right]$ . De onormaliserade egenfunktionerna inne i lådan har formen

$$\psi_n(x) = \begin{cases} A \cos \frac{n\pi x}{a} & , \text{ då } n = 1, 3, 5, \dots \\ B \sin \frac{n\pi x}{a} & , \text{ då } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

**(6 poäng)**

### Uppgift 4.

Niels Bohr lyckades konstruera en atommodell som beskrev elektronernas energinivåer i väte. Radierna för de möjliga elektronbanorna var  $r = r_n = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2 n^2}{e^2 m}$ . Visa hur Bohr kom fram till detta resultat. **(6 poäng)**

### Uppgift 5.

En partikel med energin  $E$  träffar en potentialbarriär med höjden  $V_0$  och bredden  $a$ , där  $V_0 > E$ . Vad menas i detta sammanhang med

- klassiskt förbjudet område? **(1,5 poäng)**
- tunneleffekt? **(1,5 poäng)**
- Skissera sannolikhetsdensiteten  $\psi^*(x)\psi(x)$  i området inom och kring potentialbarriären. Beskriv med ord varför sannolikhetsdensiteten ser ut som den gör i de olika områden. **(3 poäng)**

*Lycka till!*

**(konstanter och formler som kanske hjälper finns på nästa sida)**

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

$$F = \frac{mv^2}{r}$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E\Psi$$

$$u_\nu = \frac{N_\nu}{V} \langle \epsilon \rangle = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

$$\frac{\nu - \nu'}{\nu\nu'} = \frac{h}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\lambda_m T = 2,898 \cdot 10^{-3} K m$$

$$E_n = -\frac{\mu}{m} Z^2 \frac{E_0}{n^2}$$

$$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2}{r^2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$M(T) = \sigma T^4, \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} W/(m^2 K^4)$$

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$$

$$1eV = 1.602 \cdot 10^{-19} J$$

$$h = 6.626 \cdot 10^{-34} Js$$

$$c = 299792458 m/s$$

$$m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} kg$$

En handskriven dubbelsidig A4 luntlapp får tas med. Denna lämnas in tillsammans med tentsvaren.

OBS! Alla steg måste motiveras! Om ni råkat skriva ner passliga formler på luntlappen och bara använder dom utan någon förklaring så blir det poängavdrag.

### Uppgift 1.

- a) Är spatiala vågfunktionen som beskriver elektronerna i helium i grundtillståndet symmetrisk eller antisymmetrisk? Varför? (2 poäng)
- b) Beskriv kort orsaken till det relativa förhållandet i joniseringsenergi (se bild 1) mellan
1. H och He (1 poäng)
  2. He och Ne (1 poäng)
  3. B och Be (1 poäng)
  4. N och O (1 poäng)

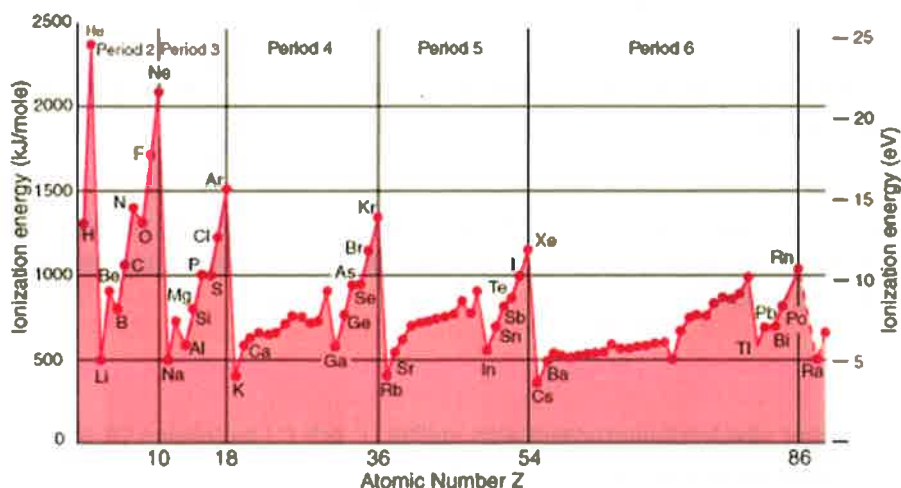


Bild 1. Joniseringsenergi för grundämnen som funktion av atomnummer.

### Uppgift 2.

- a) Elektronen i en väteatom befinner sig i tillståndet 2p. Vad är väntevärdet  $\langle r \rangle$  för dess avstånd från kärnan? (3 poäng)
- b) Vi har en väteatom i sitt grundtillstånd. Vad kan hända åt dess elektron om den beskjs med fotoner med genomsnittliga våglängden
- 1) 910 nm, 2) 122 nm, 3) 51 nm?
- Vågfunktionernas sannolikhetsfördelningars bredd är  $\pm 1\%$ . (3 poäng)

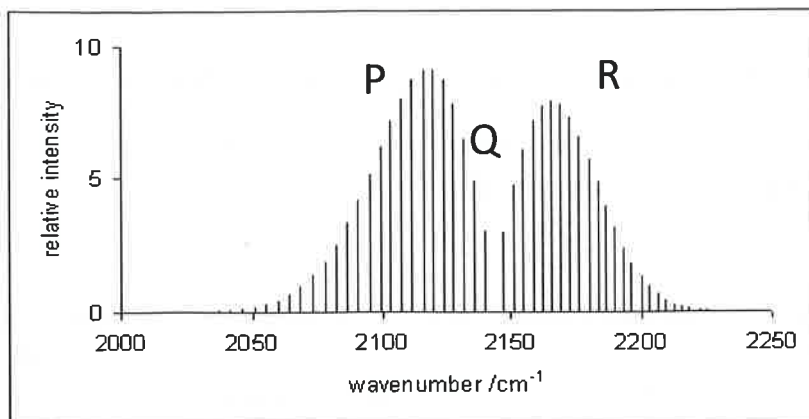


Bild 2. Rotations-vibrationssspektrum för kolmonoxid (CO).

### Uppgift 3.

- Vad beskriver en molekyls polarisabilitet och hur relaterar den till Van der Waals växelverkan? (3 poäng)
- Bild 2 visar ett rotations-vibrationssspektrum. Varför ser spektret ut som det gör? Förklara de karakteristiska dragen. (3 poäng)

**Uppgift 4.** En väteatom i ett svagt magnetfält ( $B = 0,5 \text{ T}$ ) har en p-elektron ( $l = 1$ ) i L-skalet. Hur stor energiskillnad är det mellan de två möjliga tillstånden som elektronen kan vara i (pga energinivåernas spjälkning till följd av magnetfältet)? (6 poäng)

**Uppgift 5.** Vi approximerar växelverkningspotentialen mellan  $\text{Li}^+$  och  $\text{F}^-$  i molekylen LiF som funktion av avståndet mellan kärnorna ( $R$ ) med potentialenergifunktionen

$$V(R) = \alpha e^{-aR} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

där  $\alpha$  och  $a$  är konstanter. Experimentella data visar att jämviktsavståndet  $R_0$  är  $0,156 \text{ nm}$  och potentialenergikurvans kurvatur i  $R_0$  är  $K=248 \text{ J/K}$ . Joniseringsenergin för Li är  $5,4 \text{ eV}$  och elektronaffiniteten för F är  $3,4 \text{ eV}$ . Hur mycket energi krävs det för att separera ( $R \rightarrow \infty$ ) jonerna  $\text{Li}^+$  och  $\text{F}^-$  från varandra? Hur mycket energi krävs för att spjälka ( $R \rightarrow \infty$ ) molekylen LiF till de neutrala atomerna Li och F? (6 poäng)

Lycka till!

Konstanter och formler som kanske hjälper finns på nästa sida



# Kvantfysikens tillämpningar II - 2023

Tent 20.12.2023 kl. 9.00-13.00

Alla fem uppgifter skall lösas, observera poängsättningen! Max poäng är 36

1. *Förklara dessa ord, begrepp eller fenomen* (11p)

- Härled Braggs lag och beskriv hur kan man bestämma kristallstrukturen av ett material m.h.a. röntgendiffraktion. (2p)
- Rita ut Feynmandiagrammet för elektron-positron parbildning från en gammakvant, definiera axlarna och riktningarna (1p)
- Skillnaden mellan Wigner-Seitz cellen och Primitiva enhetscellen (1p)
- Vad är magiska tal för atomkärnan, hur vet man att de existerar (nämna ett fenomen) (1p)
- Skillnader och likheter mellan s-processen och r-processen (1p)
- Generationerna (av kvarkar och leptoner), vad är de, likheter och skillnader (2p)
- Gammasönderfall (1p)
- Nämna två partikeldetektorer och sammanfatta deras funktionsprincip kort. (2p)

*Uppgifterna bör besvaras med ca 2-3 meningar per poäng*

2. *Sönderfall* (6p)

- För 20000 år sedan fanns lika mycket av två radioaktiva isotoper ( ${}^YX$  och  ${}^ZX$ ) av materialet X, och idag 67.3% av  ${}^YX$  och 32.7% av  ${}^ZX$ . Beräkna halveringstiden för  ${}^YX$  när halveringstiden för  ${}^ZX$  är 650 år (2p)
- Skriv ut och beräkna Q-värdet för sönderfallet av  ${}^{194}\text{Hg}$  (1.5p)
- Skriv ut och beräkna Q-värdet för sönderfallet av  ${}^{233}\text{Pa}$  och sönderfallet av produkten (2.5p)

*Ni kan anta att alla kärnor och utstrålade partiklar är i vila och att den elektronen som är svagast bunden medverkar i sönderfallet.*

3. *Gitterstrukturer* (8p)

- Rita ut den konventionella enhetscellen för FCC (Face Centered Cubic), BCC (Body Centered Cubic) och DIA (Diamond cubic). Skriv ut basvektorerna för dessa tre strukturer (3p)
- Förklara skillnaden mellan HCP (Hexagonal Close Packed) och FCC, och vilken är likheten mellan dem. (1p)
- Beräkna atomdensiteten (atomer/ $\text{m}^3$ ) för Ag (FCC), Fe (BCC) och Ge (DIA), med gitterkonstanten ( $a_x$ ) given nedan (2p)
- Rita ut ett SC (Simple Cubic) gitter och rita ut (2p):

I)  $[00\bar{1}]$ -riktningen II)  $[201]$ -riktningen III)  $(221)$ -planet IV)  $(201)$ -planet

*Rita en bild per riktning/plan och glöm inte att definiera axlarna*

4. *Elektronstruktur* (5p)

- Förklara med ord hur elektronbandstrukturen uppkommer och rita upp en schematisk bild på hur elektronbandstrukturen ser ut m.h.a Brillouin zoner. Skriv även in den relevanta informationen för att tolka bilden. Beskriv m.h.a. elektronbandstrukturen skillnaderna mellan isolatorer, metaller, semimetaller och halvledare, samt vad man åstadkommer m.h.a. dopning av halvledare. (3p)
- Förklara grundantaganden i de olika fria elektronmodellerna. Vilken effekt bör tas med för att förklara elektronbandstrukturen (som i a)-delen) (2p)

5. *Partikelfysik* (6p)

- Vilka konserveringslagar följs och vilka bryts (nämna alla). Är reaktionerna möjliga, och varför?

I)  $\Sigma^+ \rightarrow \Xi^0 + e^- + \bar{\nu}_e$  (1p)

II)  $D^- \rightarrow K^0 + \mu^- + \nu_\tau$  (1p)

III)  $B^+ + n \rightarrow B^0 + p$  (1p)

- Redogör de två huvudtyperna av accelerators, två modeller som exempel per huvudtyp samt två operationssätt av accelerators. Beskriv även en fördel och en nackdel med de olika huvudtyperna (3p)

$$a_{\text{Cu}}^{\text{FCC}} = 0.361\text{nm} \quad a_{\text{Fe}}^{\text{BCC}} = 0.287\text{nm} \quad a_{\text{Ge}}^{\text{DIA}} = 0.543\text{nm}$$

$$\Sigma^+ = (\bar{s}\bar{s}\bar{s}) \quad \Xi^0 = (\bar{s}\bar{s}\bar{u}) \quad D^- = (\bar{c}\bar{d}) \quad K^0 = (d\bar{s}) \quad B^+ = (u\bar{b}) \quad B^0 = (d\bar{b}) \quad n = (udd) \quad p = (uud)$$

$$1 \text{ kJ/mol} = 0.0103 \text{ eV}$$

# Fysikens mätmetoder

Kursprov 24.10.2017

Dela upp svaren på följande sätt: Uppgift 1, 2-3 och 4-5 på skilda papper (d.v.s. alla lämnar in åtminstone tre papper, lämna in ett tomt papper om du inte svarar på en enda uppgift som tillhör ifrågavarande papper). Skriv namn, studentnummer, kursens namn och datum på varje papper.

1. a) (3p) Välj sex av följande begrepp och förklara dem kort: fyrpunktsmätning, skottbrus, Nyquists teorem, kvantiseringsbrus, buffertförstärkare, equivalent-time sampling, lock-in förstärkare, emissivitet.

b) (2p) Räkna upp och förklara kort delarna i en ultraljudsmätning. (Tips: En bra mätning har åtminstone åtta delar.)

c) (2p) Bestäm signalernas frekvenser och effektivvärden för bägge bilder nedan. Är mätningen en absolut eller relativ mätning? Oscilloskopets nollnivå är justerat till mitten av rutan. Oscilloskopet är DC-kopplat,  $1M\Omega$  ingång i kanal 1. I mätningarna användes en 5 gånger dämpande sensor.

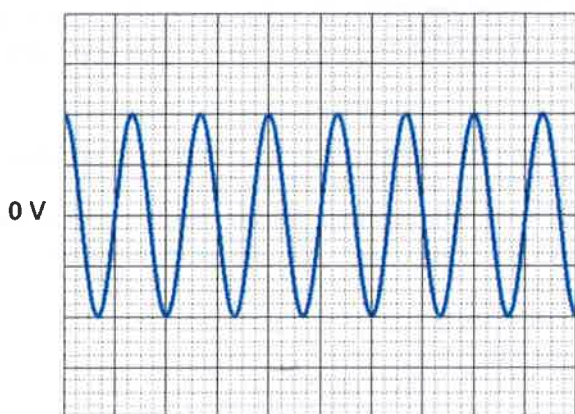


Bild 1, Signal med 1V/div och 200 $\mu$ s/div

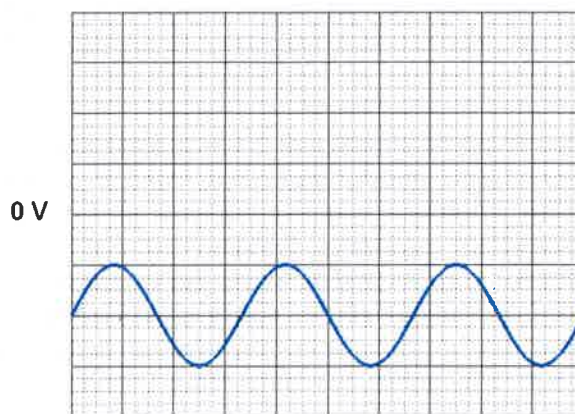
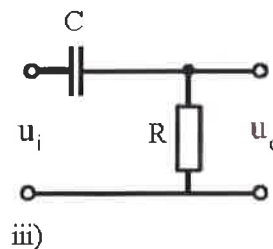
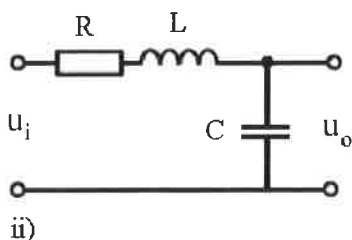
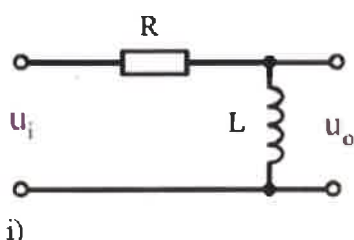


Bild 2, Signal med 5V/div och 20ms/div

2. a) (3p) Härled uttryck för amplitudresponsen (d.v.s. förhållandet  $|u_o|/|u_i|$ ) i följande kretsar. Ge svaret som funktioner av reella tal (d.v.s. lämna inte i formen "absolutbelopp av komplexa tal" utan slutför härledningen).



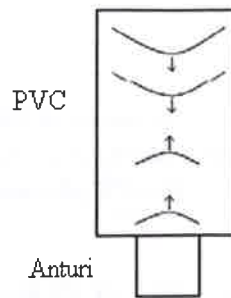
b) (2p) Hur påverkar kretsarna i a) signaler? Hurdana filter fungerar kretsarna som?

c) (1p) Du mottar en 10 MHz sinusvågssignal som har en smal bandbredd. Mätningarna störs av FM-radiosändningar inom frekvensområdet 88 - 108 MHz och av 50 Hz elnätsbrus. Hurdant filter skulle du kunna använda för att minska brusets inverkan på mätningarna? Rita kopplingskemat. Komponentvärden behöver inte bestämmas.

3. Ljudets hastighet i PVC-plast mäts med puls-ekometoden (bild till höger, Anturi=sensor):

En piezo-elektrisk sensor sänder en ultraljudspuls in i en rätblockformad bit av materialet. Pulsen framskrider genom kroppen, reflekteras från motstående yta och samma sensor mottar ekot. Ljudets hastighet räknas från kroppens längd och från flygtiden, d.v.s. tiden mellan sändning och mottagning.

Kroppens längd mäts sex gånger med ett skjutmått och som värden uppmättes (mm) {15.1, 14.8, 15.1, 15.2, 15.0, 14.9}. Flygtiden mäts sju gånger med ett oskiloskop och som värden uppmättes ( $\mu\text{s}$ ) {14.3, 14.2, 13.9, 14.0, 13.7, 14.7, 14.2}.



a) (4p) Beräkna ljudets hastighet i PVC-plast och dess 95 % -konfidensintervall.

b) (2p) Härrör den beräknade noggrannheten i a-fallet från slumpmässiga eller systematiska fel? Hurdana slumpmässiga och systematiska fel kunde existera i mätningen? Ge exempel (i pluralis) på båda och på hur bägge feltyper kunde förminska.

c) (Bonus: 2p) Har det någon betydelse att ljudets fas vänder vid gränssytan då reflexionen sker från högre akustisk impedans mot lägre akustisk impedans? Hur skiljer sig elektrisk impedans från akustisk impedans?

4. Du håller på att utveckla ett nytt mätinstrument för att mäta temperatur. Du vill jämföra ditt instrument med områdets guldstandardmetod, varpå du utför 64 olika mätningar med bägge metoder.

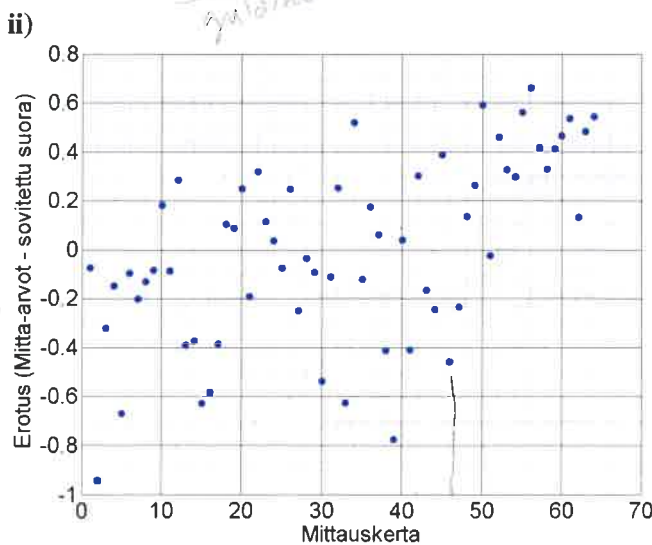
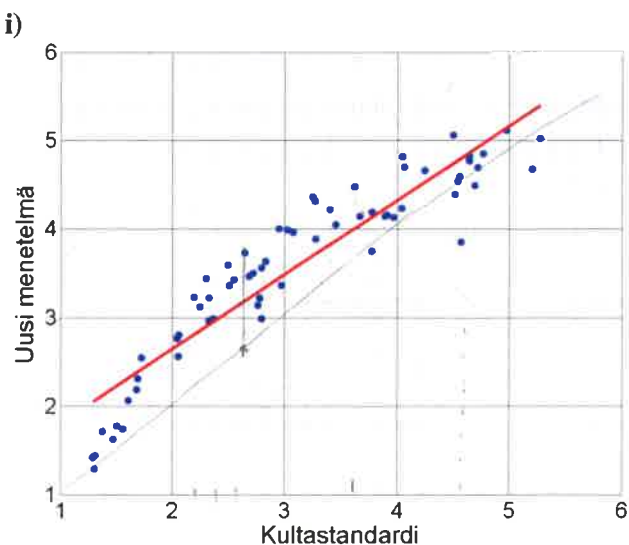
a) (3p) I i)-grafens syns mätresultaten med den nya metoden som funktion av guldstandardens och en linje anpassad till punkterna. Förklara hur den yttre noggrannheten (=accuracy) och den inre noggrannheten (=precision) syns i grafen. Skissa hur i)-grafens skulle se ut om

$\alpha$ ) den yttre noggrannheten vore god och den inre noggrannheten dålig

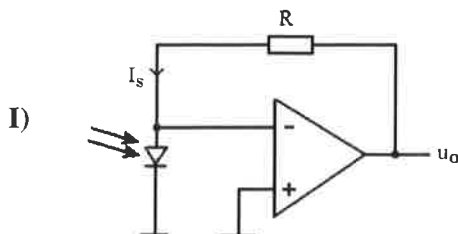
$\beta$ ) den yttre noggrannheten vore liten och den inre noggrannheten stor

b) (3p) I ii)-grafens har linjen från i)-grafens subtraherats från den nya metodens värden. Gör en grov numerisk uppskattning om den nya metodens inre noggrannhet. Gör även en grov numerisk uppskattning om den nya metodens yttre noggrannhet.

(Uusi menetelmä=ny metod, kultastandardi=guldstandard, mittauskerä=mätgång, erotus(mitta-arvot - sovitettu suora) = differensen(mätvärde - anpassad linje)).



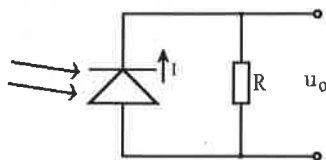
5. I)-kretsen nedan är en fotodiodförstärkare. Den mäter ljusstyrkan i ett rum i realtid som del av ett övervakningssystem.



Vänd!

- a) (1p) Den största ljusintensiteten i användningsmiljön producerar en ström i fotodioden på  $6.1 \mu\text{A}$ . Då vill du att utgångsspänningen skall vara  $5 \text{ V}$ . Välj det värde för  $R$  som förverkligar detta.
- b) (3p) I kretsens motstånd uppstår Johnson brus och strömmen i kretsen är så liten att skottbruset har en inverkan.  $u_o$  lågpasfiltreras och samplas med  $1 \text{ kHz}$ , varpå bandbredden är  $0 \text{ Hz}$ -Nyquistfrekvensen. Rummets temperatur är  $21^\circ\text{C}$ .  $u_o$  har ett effektivt spänningsvärde på  $2.13 \text{ V}$  under en längre tid. Dessutom producerar operationsförstärkaren själv brus vars effektiva värde är  $12.8 \mu\text{V}$ . Vad är brusets sammanlagda effektiva värde? Vad är  $u_o$ 's signal-brusförhållande i decibel?
- c) (1p) I systemets följande steg AD-konverteras  $u_o$ . Hur många bits behövs för konverteringen för att digitaliseringsresolutionen skall vara noggrannare än brusets effektiva värde?
- d) (1p) Varför är I)-kretsen bättre än krets II) som utför samma funktion?

II)



$$\text{LSB} = \frac{V_{\text{ref}}}{2^N - 1}$$

$$2^N - 1 = \frac{V_{\text{ref}}}{\text{LSB}}$$

$$2^N = \frac{V_{\text{ref}}}{\text{LSB}} + 1$$

Formler och konstanter:

$$Z_R = R$$

$$Z_C = -\frac{j}{\omega C}$$

$$Z_L = j\omega L$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum (x_N - \mu)^2}$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum (x_N - \bar{x})^2}$$

$$\sigma_{\text{mean}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\sum \left( \frac{\partial y}{\partial x} \sigma_x \right)^2}$$

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

$$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

$$I_{RMS} = \sqrt{2qI\Delta f}$$

$$U_{RMS} = \sqrt{4k_B T R \Delta f}$$

$$q_e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$k_B = 1.381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

$$V_{rms} = \sqrt{V_{DC}^2 + \frac{V_0^2}{2}}$$

1. (12 p) Definiera eller förklara kort följande begrepp:

- Första Brillouin-zonen
- Kirala nanorör
- Egg-dislokation
- Laues kriterium för röntgendiffraktion
- Nollpunktsenergi
- Debye-temperatur

2. (6 p) Defektkoncentrationen  $c$  vid termodynamisk jämvikt är proportionell mot

$$c \propto e^{-(E_f + P\Omega)/k_B T} \quad (1)$$

där  $E_f$  är defektens formationsenergi,  $P$  är trycket och  $\Omega$  volymen per atom. Vid normalt atmosfäriskt tryck är den tryckberoende termen  $P\Omega$  så liten att man inte behöver beakta den. Uppskatta vid hur högt tryck termen börjar få betydelse för en typisk FCC-metall. Du kan anta att  $E_f \sim 1$  eV.

3. (6 p) I notationen för enkla kubiska gitter kan vektorerna i det reciproka gittret skrivas

$$\mathbf{K} = \frac{2\pi}{a}(h\mathbf{i} + k\mathbf{j} + l\mathbf{k})$$

Visa att för FCC-gittret beskrivet som ett kubiskt gitter med en bas existerar den reciproka vektorn  $\mathbf{K}$  om och bara om  $h, k, l$  alla är udda eller alla jämna.

4. Hur och varför kan fononer leda värme? Diskutera termisk konduktivitet i formen av analogin med en atomär gas. Vilken typ av spridning möjliggör värmeöverföring?

5. (8 p) En enkel Tersoff-typs potential för atomer vid avståndet  $r$  kan formuleras så att energin per en bindning med längden  $r$  skrivs

$$V_{ij}(r) = De^{-2\alpha r} - 2Db(Z)e^{-\alpha r}$$

där  $b$  beror på atomens koordinationsstal  $Z$  som

$$b(Z) = (1 + a^2(Z - 1)^2)^{-1/4}$$

Bara bindningar till närmaste grannar räknas.

Kisel har gitterkonstanten 5.43 Å och kohesionsenergin 4.63 eV. Lös parametrarna  $D$ ,  $\alpha$  och  $a$  för denna potential så att potentialen beskriver kisel med ett minimum i kohesionsenergin vid korrekt koordinationsstal och ger exakt rätt gitterkonstant och kohesionsenergi.

Tentan är samma som 2017 förutom 1a, 1c och 1d

Fasta tillståndets fysik 2022.

Mellanföreläsning 2.

12.5 2022

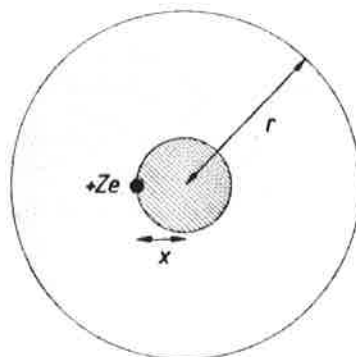
1. (12 p) Definiera eller förklara kort följande begrepp. I de definitioner som är märkta med en asterisk (\*) skall du ge åtminstone en ekvation som en del av definitionen för att få fulla poäng.

- En-elektronradien\*
- Bloch-funktion\*
- Plasmon
- Polarisabiliteten hos atomer\*
- Ising-modellen\*
- Cooper-par

2. Sommerfelds metallteori. Redogör för dess fysikaliska grund. Nämn åtminstone tre makroskopiska fysikaliska egenskaper som teorin beskriver hyfsat bra, och åtminstone en som den helt misslyckas i att beskriva

3. Anta att det existerar en metall med det enkla kubiska Bravais-gittret som kristallstruktur och exakt en valenselektron per atom. Är Fermi-sfären för fria elektroner för denna metall helt innanför den första Brillouin-zonen? Hur skulle du anta att en svag periodisk potential modifierar Fermi-sfären för fria elektroner?

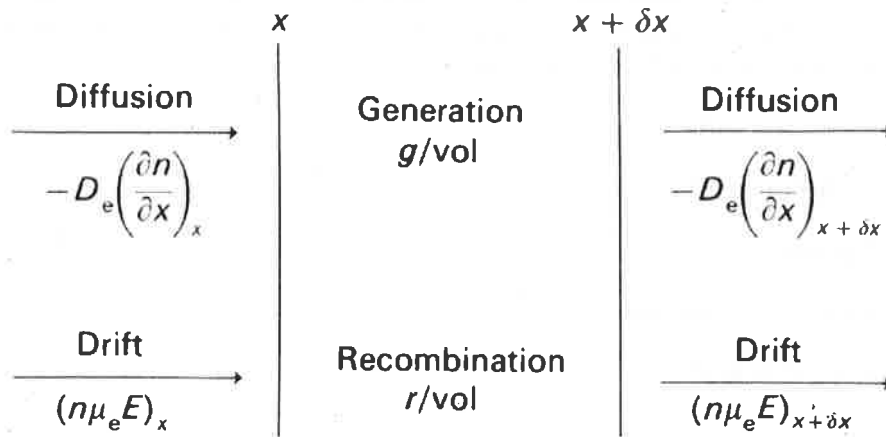
4. En enkel modell för polarisation av en atom får man om vi antar att dess  $Z$  elektroner är jämt fördelade inom en sfär med radien  $r$ . Vid jämvikt är sfärens centrum givetvis exakt vid atomkärnan. Men om man pålägger ett yttre fält, kommer kärnans och elektronernas centrum att förflytta sig litet från varann:



Härled en uppskattning för den atomära polarisabiliteten  $\alpha = \mathbf{p}/\mathbf{E}$  i denna modell i en He-atom med radien  $r = 0.59 \text{ \AA}$ .

VÄND!

5. Betrakta följande system:



Du kan anta att Ficks lag för laddningsantals-ström-densiteterna  $J$

$$J_e = -D_e \frac{\partial n}{\partial x} \quad (1)$$

$$J_h = -D_h \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2)$$

gäller. Härled kontinuitetsekvationen för elektroner i systemet då ett yttre elfält  $E$  har lagts på systemet.



Muista merkitä jokaiseen paperiin nimen lisäksi myös opiskelijanumero. Tehtävät tarkastetaan erikseen, joten tee jokaisen tehtävän vastaus omalle konseptiarkilleen.

### Tehtävä 1

- (a) Laske kaikki juuret  $\sqrt[4]{i}$ .  
(b) Laske kompleksiluvun  $\sinh(2 - i)$  reaaliosa ja imaginääriosia. ~

### Tehtävä 2

Osoita, että jos funktio  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  on analyyttinen, niin se toteuttaa Cauchyn-Riemannin yhtälöt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Tässä  $u = \operatorname{Re} f$ ,  $v = \operatorname{Im} f$ ,  $x = \operatorname{Re} z$  ja  $y = \operatorname{Im} z$ .

### Tehtävä 3

Laske integraali

$$\int_{\gamma} z^2 \sinh(z^3) dz,$$

- (a) kun  $\gamma$  on käyrä  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , ~  
(b) kun  $\gamma$  on käyrä  $\gamma(t) = it^{\frac{1}{3}}$ ,  $t \in [0, 8]$ . ✓

### Tehtävä 4

- (a) Laske funktion

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$$

Laurentin sarja pisteiden  $z = 0$  ja  $z = i$  ympäristössä. Määritä sarjojen suppene-  
missäteet.

- (b) Laske funktion  $f$  residy pisteissä  $z = 0$  ja  $z = i$ .

### Tehtävä 5

Laske residylauseen avulla integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 16} dx.$$

The students are allowed calculators.

1. Find all the complex solutions of the equation  $\sin \pi z = 0$ .
2. Show that the function  $v(x, y) = e^{-y} \sin x$  is harmonic and find the holomorphic function  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ .
3. Calculate the integral

$$\oint_{\gamma} \frac{\cos z}{(z+i)^3} dz,$$

along the curve  $\gamma(t) = -i + e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

4. Expand the function

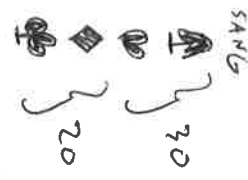
$$f(z) = \frac{1}{1-z^2}$$

in powers of  $z$  in the regions

$$\text{a) } 0 \leq |z| < 1, \quad \text{b) } |z| > 1.$$

5. Calculate the following integral, using the theorem of residues:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}.$$

SAMS  


Muista merkitä jokaiseen paperiin nimen lisäksi myös opiskelijanumero. Tehtävät tarkastetaan erikseen, joten tee jokaisen tehtävän vastaus omalle konseptiarkilleen.

**Tehtävä 1**

- (a) Laske kaikki juuret  $\sqrt[4]{i}$ .
- (b) Laske kompleksiluvun  $\sinh(2 - i)$  reaali- ja imaginääriosia.

140	100	60
<del>90</del>	<del>30</del>	150

**Tehtävä 2**

Osoita, että jos funktio  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  on analyyttinen, niin se toteuttaa Cauchyn-Riemannin yhtälöt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Tässä  $u = \text{Re } f$ ,  $v = \text{Im } f$ ,  $x = \text{Re } z$  ja  $y = \text{Im } z$ .

**Tehtävä 3**

Laske integraali

$$\int_{\gamma} z^2 \sinh(z^3) dz,$$

- (a) kun  $\gamma$  on käyrä  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ,
- (b) kun  $\gamma$  on käyrä  $\gamma(t) = it^{\frac{1}{3}}$ ,  $t \in [0, 8]$ .



**Tehtävä 4**

- (a) Laske funktion

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$$

Laurentin sarja pisteiden  $z = 0$  ja  $z = i$  ympäristössä. Määritä sarjojen suppene-  
missäteet.

- (b) Laske funktion  $f$  residy pisteissä  $z = 0$  ja  $z = i$ .

**Tehtävä 5**

Laske residylauseen avulla integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 16} dx.$$

# Fysiikan matemaattiset menetelmät I, kaavakokoelma

## Eulerin $\Gamma$ - ja $B$ -funktiot, Riemannin $\zeta$ -funktio

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad \Gamma(n+1) = n! \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

$$\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z} \quad B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \quad B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

## Fourier'n sarjat

Kun  $f$  on  $L$ -periodinen:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi kx/L} \quad c_k = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-i2\pi kx/L} dx$$

Kun  $f$  on  $2\pi$ -periodinen:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

## Fourier'n muunnos

$$\mathcal{F}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f] e^{ipx} \frac{dp}{2\pi} \quad f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy$$

$$\mathcal{F}_s[f] = \int_0^{\infty} f(x) \sin(px) dx \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \mathcal{F}_s[f] \sin(px) dp \quad \mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \mathcal{F}[g]$$

$$\mathcal{F}_c[f] = \int_0^{\infty} f(x) \cos(px) dx \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \mathcal{F}_c[f] \cos(px) dp \quad \mathcal{F}[f'] = ip \mathcal{F}[f]$$

$$\mathcal{F}[f](\mathbf{p}) = \int_{\mathbb{R}^d} d^d \mathbf{x} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \quad f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \mathcal{F}[f] e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}$$

## Parsevalin kaava Fourier'n sarjoille ja muunnokselle

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \pi \left[ \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) \right] \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}[f]|^2 \frac{dp}{2\pi}$$

## Laplacen muunnos

$$\mathcal{L}[f] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad f = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \mathcal{L}[f] e^{st} \frac{ds}{2\pi i} \quad \mathcal{L}[af + bg] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g]$$

$$\mathcal{L}[-tf] = \frac{d\mathcal{L}[f]}{ds} \quad \mathcal{L}[f'] = s\mathcal{L}[f] - f(0^+) \quad \mathcal{L} \left[ \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \right] = \mathcal{L}[f] \mathcal{L}[g]$$

Muista merkitä jokaiseen paperiin nimen lisäksi opiskelijanumero. Tehtävät tarkastetaan erikseen, joten tee jokaisen tehtävän vastaus **omalle konseptiarkilleen**.

### Tehtävä 1

Laske integraalit

$$a) \int_0^1 x^k \ln x \, dx \quad , \quad b) \int_0^{\infty} \frac{x^a dx}{(1+x^m)^b}$$

Eulerin  $\Gamma$ -funktion avulla. Tässä  $k > -1$ ,  $a, b > 0$  ja  $m > 1$ . Mikä lisäehto tarvitaan jälkimmäisen integraalin suppenemiseen?

### Tehtävä 2

Kirjoita Parsevalin kaava funktiolle  $f(x) = x$  välillä  $-\pi < x < \pi$  ja laske sen avulla sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ summa.}$$

### Tehtävä 3

Määritä differentiaaliyhtälön

$$y''(x) - 4y(x) = f(x)$$

yleinen ratkaisu Fourier'n sarjan avulla, kun  $f(x)$  on  $2\pi$ -jaksollinen funktio, joka välillä  $[0, 2\pi]$  on

$$f(x) = x - 2\pi .$$

### Tehtävä 4

Laske deltajonon

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0 & x < -\frac{1}{2n} \\ n & -\frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 0 & \frac{1}{2n} < x \end{cases}$$

Fourier'n muunnos ja sen raja-arvo, kun  $n \rightarrow \infty$ .

### Tehtävä 5

Ratkaise Laplacen muunnosta käyttäen differentiaaliyhtälö

$$x'' - x = t^2, \quad x(0) = 1, x'(0) = 0 .$$

Muista merkitä jokaiseen paperiin nimen lisäksi opiskelijanumero. Tehtävät tarkastetaan erikseen, joten tee jokaisen tehtävän vastaus **omalle konseptiarkilleen**.

1. Laske integraalit

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{(x^2 + m^2)^b} dx \quad b) \int_0^1 \frac{x^b}{(1-x)^{2+b}} \exp\left(\frac{x}{x-1}\right) dx$$

Eulerin  $\Gamma$ - ja  $\beta$ -funktioiden avulla. Tässä  $2b > 5$  ja  $m \in \mathbb{R}_+$ .

2. Laske funktion  $\cos ax$ ,  $a > 0$ , Fourier'n sarja välillä  $[-\pi, \pi]$ , missä  $a$  ei ole kokonaisluku.

$$(\text{Vinkki: } \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)].)$$

3. a) Laske funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}|x|, & \text{kun } 0 \leq |x| \leq 2, \\ 0, & \text{kun } |x| > 2 \end{cases}$$

Fourier'n muunnos.

b) Laske Parsevalin kaavan avulla integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt.$$

$$(\text{Vinkki: } 1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha.)$$

4. Käyttäen satulapisteapproksimaatiota (Laplacen metodia), johda Stirlingin approksimaatio kertomafunktiolle:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}, \quad \text{kun } n \rightarrow \infty.$$

5. Ratkaise Laplacen muunnosta käyttäen differentiaaliyhtälö

$$x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = 0, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 7$$

ja näytä, että tulos on

$$x(t) = e^t(4 \sin 2t - \cos 2t).$$

Kirjoita jokaiseen paperiin nimesi, opiskelijanumerosi, kurssin nimi ja päivämäärä

1. Etsi yhtälön

$$\partial_t u(t, x) + 4\partial_x u(t, x) = 0$$

yleinen ratkaisu. Etsi sen jälkeen myös se yksikäsitteinen ratkaisu, joka toteuttaa alku-ehdon

$$u(0, x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

2. Lämpötilan jakauma  $T(t, \mathbf{x})$  homogeenisessa aineessa, jossa ei ole lämmön lähteitä, toteuttaa diffuusioyhtälön

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\nabla^2 T,$$

kun  $D = k/C\rho$ , missä  $k$  on aineen lämmönjohtavuuskerroin,  $C$  on aineen ominaislämpö ja  $\rho$  on aineen tiheys.

Ratkaise särmiön  $\{x, y, z \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}$  lämpötilajakauma ajalle  $t > 0$ , kun se hetkellä  $t = 0$  oli annettu funktio  $\tau(x, y, z)$ , ja kun särmiön ulkopinnat pidetään nollalämpötilassa ( $T = 0$ ).

*Vihje:* käytä muuttujien erottelua. Seuraavista trigonometristen funktioiden ortogonaalisuusintegraaleista saattaa olla hyötyä:

$$\begin{aligned} \int_0^L dx \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right) &= \frac{L}{2}\delta_{m,n}, \\ \int_0^L dx \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{L}x\right) &= \frac{L}{2}\delta_{m,n}, \quad m, n \geq 1 \\ \int_0^L dx \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{L}x\right) &= 0, \end{aligned}$$

3. Funktio  $f$  toteuttaa konfluentin hypergeometrisen yhtälön

$$z \frac{d^2 f}{dz^2} + (c - z) \frac{df}{dz} - af = 0,$$

missä  $a, c \in \mathbb{C}$  ja  $c \neq 1$ . Mitkä ovat yhtälön erikoispisteet? Käyttäen sarjaratkaisumenetelmää, löydä yhtälön yleinen ratkaisu pisteen  $z = 0$  ympäristössä.

4. Tiedetään, että Besselin funktioiden  $J_n$ , missä  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , generoiva funktio on  $\exp\left[\frac{1}{2}z\left(t - \frac{1}{t}\right)\right]$ , ts

$$\exp\left[\frac{1}{2}z\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(z).$$

Johda tästä tiedosta Besselin funktioille palautuskaavat

$$J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = 2J'_n(z)$$

$$J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z}J_n(z),$$

kun indeksi  $n$  on kokonaisluku.

1. Consider the following first order quasilinear PDE

$$\partial_t u(x, t) + \partial_x u(x, t) + (t + x)u(x, t) = 0 .$$

- i. Construct the general solution and check your result.
- ii. Let us further impose the initial condition

$$u(x, 0) = e^{-\frac{1}{2}x^2} .$$

What is the particular solution in this case?

2. A long cable has a rectangular cross-section, with width  $a$  and height  $b$ . The sides at  $x = 0$  and  $x = a$  are conducting, and earthed, meaning that the electrostatic potential  $\phi = 0$  there. In the interior,  $\phi$  obeys the Laplace equation

$$\nabla^2 \phi(x, y) = 0.$$

- i. Find the most general solution for  $\phi$  consistent with the boundary conditions at  $x = 0, a$ .

The potential on the sides  $y = 0$  and  $y = b$  is

$$\phi(x, 0) = +V \frac{a}{2} \delta(x - a/2), \quad \phi(x, b) = -V \frac{a}{2} \delta(x - a/2)$$

where  $\delta(x)$  is the Dirac  $\delta$ -function and  $V$  is a constant.

- ii. Find the potential  $\phi(x, y)$  in the interior of the cable.

*Hint:* use separation of variables. The following orthogonality integrals of trigonometric functions may be useful:

$$\begin{aligned} \int_0^L dx \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) &= \frac{L}{2} \delta_{mn}, \\ \int_0^L dx \cos\left(\frac{\pi m}{L}x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) &= \frac{L}{2} \delta_{mn}, \quad m, n \geq 1 \\ \int_0^L dx \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) &= 0 . \end{aligned}$$



3. Bessel's equation is

$$z^2 \frac{d^2 f}{dz^2} + z \frac{df}{dz} + (z^2 - \nu^2) f = 0,$$

where  $\nu \in \mathbb{R}$  and  $\nu \geq 0$ .

- i. What are the special points of the equation and what are their types?
- ii. Using the Frobenius/series method around the point  $z = 0$ , find the roots of the indicial equation and the recursion relation.
- iii. Show that the recursion relation is solved by the coefficients in the expansion

$$J_{\pm\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{\Gamma(\pm\nu + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k \pm \nu}.$$

4. The generating functions

$$g_m(t, x) = \frac{(2m-1)!!}{(1-2xt+t^2)^{m+1/2}}$$

can be used to generate associated Legendre functions

$$\frac{(2m-1)!!}{(1-2xt+t^2)^{m+1/2}} = \sum_{n=m}^{\infty} \Pi_n^m(x) t^{n-m},$$

where

$$\Pi_n^m(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2 - 1)^n$$

and the associated Legendre functions are  $P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \Pi_n^m(x)$ .

Use the generating function (or otherwise) prove the recursion relations

- i.  $(n-m+1)P_{n+1}^m(x) - (2n+1)xP_n^m(x) + (n+m)P_{n-1}^m(x) = 0$
- ii.  $P_{n+1}^{m+1}(x) - P_{n-1}^{m+1}(x) = (2n+1)(1-x^2)^{1/2} P_n^m(x)$

Tee jokainen tehtävä eri paperille sekä kirjoita jokaiseen paperiin nimesi, opiskelijanumerosi, kurssin nimi ja päivämäärä.

1. Etsi funktionaalin

$$J[y] = \int_0^{\infty} dx [(y')^4 + 2y(y')^3] \frac{e^{2x}}{2}$$

reunaehdot  $y(0) = 0$ ,  $y(\infty) = 1$  toteuttavat stationaariset käyrät ja tutki Legendren ehdon avulla voiko kyseessä olla maksimi tai minimi.

2. Tarkastellaan seuraavaa Sturm-Liouville (SL) -ongelmaa

$$x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0, \quad (1)$$

reunaehdoilla  $y(1) = 0 = y'(b)$ , missä reaaliparametri  $b > 1$ .

- (a) Etsi kaikki ominaisarvot  $\lambda$  ja niitä vastaavat ominaisfunktiot  $y_\lambda(x)$ . *Vinkki:* muutujanvaihdoista  $x = e^z$  saattaa olla apua.  
 (b) Muunna yhtälö (1) standardiin SL-muotoon:

$$\frac{d}{dx} (p(x)y'(x)) + (-q(x) + \lambda w(x)) y(x) = 0.$$

Onko kyseessä säännöllinen vai singulaarinen SL-ongelma? Perustele.

- (c) Kirjoita SL-teorian yleinen ortogonaalisuusehto. Sovella sitä (a)-kohdan ominaisfunktioille.  
 (d) Määrä normalisointi s.e. ominaisfunktiot ovat ortonormaaleja.  
 (e) Esitä vakiofunktio  $f(x) = 1$  ominaisfunktioiden sarjana.  
 (f) Tarkastele (e)-kohdan sarjan konvergenssia. Kiinnitä  $x = \sqrt{b}$  laskeaksesi ääretön summa:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \dots$$

3. Tarkastellaan suljetulla reaaliakselin välillä  $[0, 1]$  olevia jatkuvia reaalfunktioita. Määritellään seuraava kuvaus

$$\langle f|g \rangle = \int_0^1 dx f(x)g(x). \quad (2)$$

- (a) Osoita, että (2) määrittelee sisätulon.  
 (b) Käytä sisätuloa (2) konstruoidaksesi ortonormaali kanta avaruuteen  $\mathcal{P}_1[0, 1]$ , ts. jatkuvien ensimmäisen asteen polynomien avaruuteen.  
 (c) Etsi se polynomi  $h \in \mathcal{P}_1[0, 1]$  joka on paras approksimaatio funktiolle  $f(x) = x^2$  sisätulon (2) määräämän normin mielessä.

*Vinkki:* Kuvaus  $\langle | \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(u, v) \mapsto \langle u|v \rangle$  on vektoriavaruuden  $V$  sisätulo, jos kaikilla  $u, v, w \in V$  ja  $a \in \mathbb{C}$

**Jatkuu kääntöpuolella**

- (i)  $\langle u|u \rangle \in \mathbb{R}$  ja  $\langle u|u \rangle \geq 0$
- (ii)  $\langle u|u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0_V$
- (iii)  $\langle u|v \rangle = \langle v|u \rangle^*$
- (iv)  $\langle u|v + w \rangle = \langle u|v \rangle + \langle u|w \rangle$
- (v)  $\langle u|av \rangle = a \langle u|v \rangle$

missä  $0_V$  on vektoriavaruuden  $V$  nollavektori.

4. Olkoon  $\{e_n\}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  separoituvan Hilbertin avaruuden  $H$  ortonormitettu kanta. Määritellään operaattorit  $U$  ja  $P_1$  seuraavasti:

$$\begin{aligned}
 Ue_n &= e_{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \\
 P_1e_1 &= e_1, \quad P_1e_n = 0_H, \quad n = 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

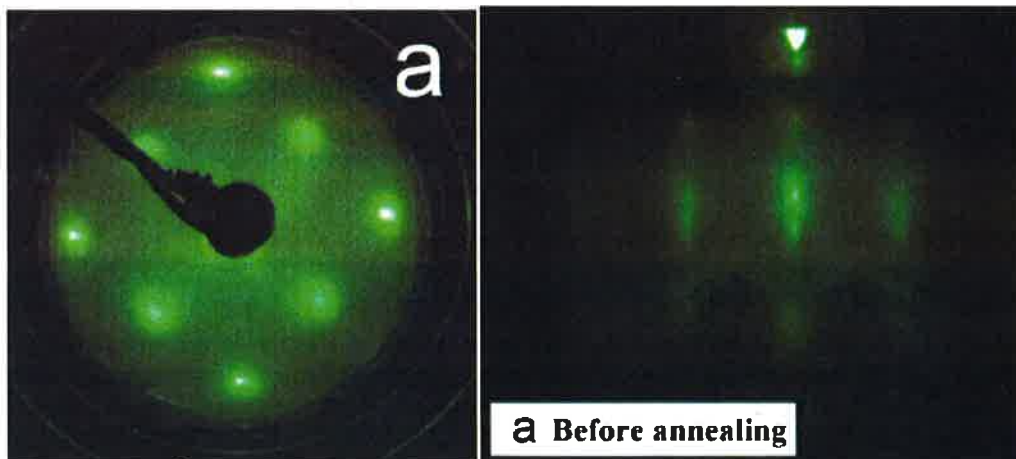
missä  $0_H$  on Hilbertin avaruuden nollavektori.

- (a) Osoita että  $U$  on rajoitettu ja laske normi  $\|U\|$ .
  - (b) Osoita että  $P_1$  on projektio-operaattori.
  - (c) Määrää adjungoitu operaattori  $U^\dagger$ .
  - (d) Laske  $U^\dagger U$  ja  $UU^\dagger$ .
  - (e) Onko  $U$  isometrinen?
  - (f) Onko  $U$  unitaarinen?
-

## Surface Physics (MATR308) 2023

Written exam 2023-12-19

1. Consider two surfaces the structure of which is described by a square and a hexagonal 2D lattice. The two surfaces are subjected to a flux of adsorbates which form  $3 \times 1$  and  $2 \times 1$  superstructures on the square and the hexagonal surface, respectively. Draw schematically the real-space lattices of the two superstructures, including the atomic positions of both the surface and adsorbate atoms. Also draw schematically the reciprocal-spaces lattices of the two superstructures as they would appear during a diffraction experiment (e.g., by low energy electron diffraction). (4p)
2. You are tasked with designing the pumping system of a vacuum chamber which will be used for performing x-ray photoelectron spectroscopy measurements. What type of pump(s) you will choose? Justify your answers. (4p)
3. The low energy electron diffraction (LEED) and reflection high-energy electron diffraction (RHEED) patterns of the MgO(100) surface are presented below (left and right panel, respectively). Why are the spots in the LEED pattern round and well defined and the spots in the RHEED pattern elongated? (2p)



4. A beam of electrons (hereinafter primary electrons) with energy  $E_p$  impinges on a surface. The interaction of the primary electron beam with the surface results in emission of secondary electrons. List the type of secondary electrons that are emitted from the surface, draw qualitatively their energy spectrum, and briefly describe how they can be used for studying surfaces. (10p)
5. Metal surfaces often exhibit relaxation, i.e., the interplanar spacing along the surface normal either contracts or expands with respect to the bulk interplanar spacing. Often this behaviour extends over multiple layers from the surface exhibiting a damping

oscillatory pattern (i.e., contraction-expansion-contraction...). Explain the reason behind this behaviour. **(4p)**

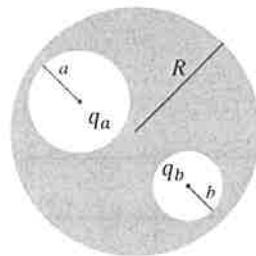
6. The Si(100) surface exhibits two reconstructions, i.e., the  $2 \times 1$  dimer reconstruction and the  $c(4 \times 2)$  reconstruction. Draw schematically (along with the Si(100) surface bulk termination), and briefly describe the key features and origin of the two reconstructions. Under what conditions is the  $c(4 \times 2)$  reconstruction observed? For the schematic drawing both top and side views depicting the first three atomic layers of the surface are accepted. **(6p)**
  
7. What is a singular and what is a vicinal surface and how are they related? Which of the two surfaces has higher energy and why? **(4p)**
  
8. Diffusion of adatoms on a surface is typically described as a "random walk". What is the meaning of this and what are the requirements for a diffusion process to be classified as random walk? What does the diffusion rate during a random walk depend on? **(6p)**

Please note the following:

- Write your name or student number on every paper that you hand in, including your one-page hand-written sheet.
- Explain (shortly) your reasoning in words also for the problems that involve calculations!

Answer either problem 1 or problem 2!

- (a) Describe shortly the static fields  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{M}$  and  $\mathbf{H}$ . (What are their underlying laws? How can the fields be measured? What causes the fields? What kind of constitutive relations relate the fields?) [4 p]
  - (b) Describe how the magnetic force breaks the basic laws of Newtonian mechanics. [2 p]
- Two spherical cavities (radii  $a$  and  $b$ ) are hollowed out from the interior of a neutral conducting sphere of radius  $R$  (see figure below). At the center of each cavity a point charge is placed.
  - (a) Find the surface charges  $\sigma_a$ ,  $\sigma_b$  and  $\sigma_R$  [1 p]
  - (b) What is the field outside the conductor? [1 p]
  - (c) What is the field within each cavity? [1 p]
  - (d) What is the force on  $q_a$  and  $q_b$ ? [1 p]
  - (e) Which of these answers would change if a third charge  $q_c$  were brought near the conductor? [2 p]



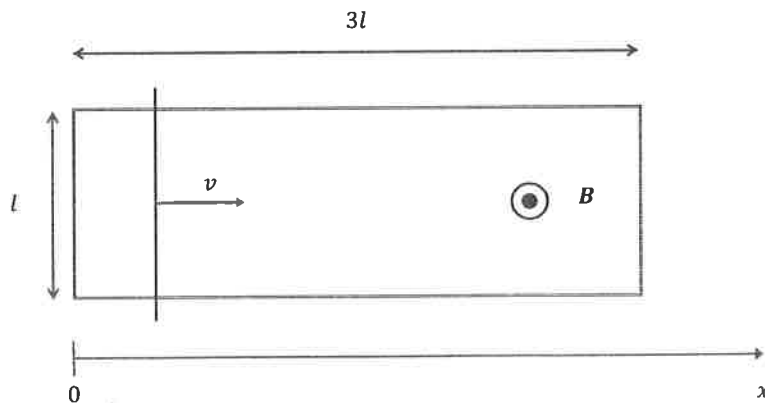
Answer either problem 3 or problem 4!

- A spherical conductor (radius  $a$ ) carries a charge  $Q$ . It is surrounded by linear dielectric material of susceptibility  $\chi_e$  out to radius  $b$ . Find the energy of this configuration. [6 p]
- Consider a system consisting of two coils with a current  $I_1$  flowing through coil 1 and current  $I_2$  flowing through coil 2. Starting from the expression

$$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dV$$

determine the energy in the system in terms of current and inductance. [6 p]

5. A current  $I$  flows down a long straight wire of radius  $a$ . The wire is made of linear material with magnetic susceptibility  $\chi_m$ , and the current is distributed uniformly.
- What is the magnetic field a distance  $s$  from the axis? [2 p]
  - Find all the magnetization currents. [2 p]
  - What is the *net* magnetization current flowing down the wire? [2 p]
6. A parallel-plate capacitor consists of two parallel circular plates (capacitance  $C$ ), between which there is an imperfect insulating matter (dielectric with permittivity  $\epsilon$ , conductivity  $\sigma$ ). Let the capacitor be charged to a potential difference  $\Delta\varphi$  after which it is isolated. Determine:
- the charge of the capacitor as a function of time. [2 p]
  - the displacement current in the dielectric. [2 p]
  - the magnetic field in the dielectric. [2 p]
7. A rectangular loop of conducting wire is placed entirely in a uniform magnetic field so that the plane of the loop is perpendicular to the field (the magnetic field is pointing out of the paper, see the figure below). A movable conducting crossbar connecting the two longer sides of the loop is made to move with a constant velocity  $v$ . Determine the currents in the system when the crossbar is at  $x = l$ . Both the wire and the crossbar have a resistance per unit length  $r$ . You do not need to take into account the inductance. [6 p]



# **AEROSOL PHYSICS I**

## **EXAMINATION**

**01.11.2022**



Institute for Atmospheric and Earth System Research



UNIVERSITY OF HELSINKI



Points per exercise are indicated in brackets. Total points: 30!

-----

Use the following numbers, whenever needed:

Ideal gas constant:

$$R = 8.31 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

Air viscosity:

$$\eta = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

Vacuum permittivity:

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ s}^4 \cdot \text{A}^2 \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$$

Elementary charge:

$$e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$$

Refractive index of water = 1.33

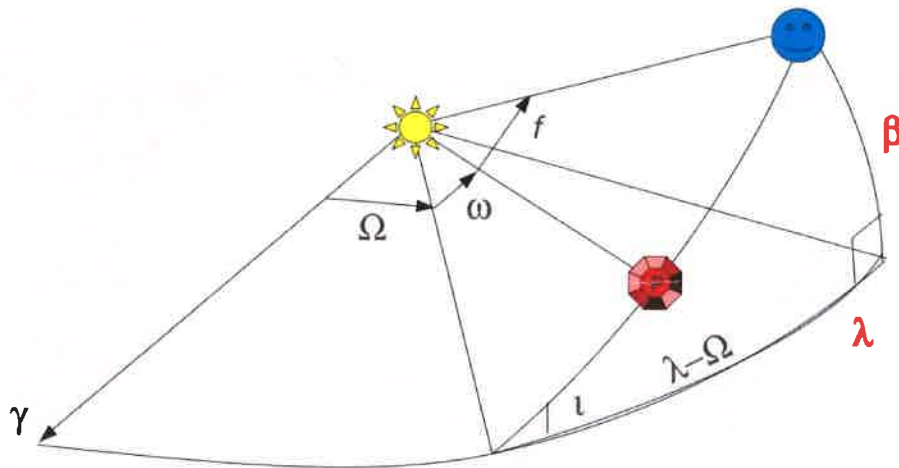
Diffusion coefficient of a 50 nm diameter particle in standard conditions:

$$D = 2 \times 10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

1. A smoker draws smoke with a flow of 0.5 liter per second for 2 seconds through a cigarette with a mass concentration  $30 \text{ g} \cdot \text{m}^{-3}$ . Assume all particles have the same density of  $1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$  and size (diameter) 500 nm.
- What is the number concentration and total particle number inhaled? **(1 Pts.)**
  - The inhale creates a slight pressure drop compared to the atmosphere ( $p_{\text{throat}} = 700 \text{ mbar}$ , i.e.  $\sim 0.7 \text{ atm}$ ). Given that the mean free path of air molecules at 1 atm is 66 nm, calculate the mean free path of air molecules at the lower pressure. Is the motion of the smoke particles described by continuum or non-continuum dynamics? **(2 Pts.)**
  - The throat is approximated by a straight cylindrical tube with diameter 3 cm. Are the losses characterized by turbulent or laminar deposition? Calculate the relevant dimensionless number, assume that the air viscosity is constant with pressure, but use a gas density of  $0.9 \text{ kg m}^{-3}$  at 0.7 atm (careful, these are not standard conditions!) **(2 Pts.)**
  - Deep in the lungs these particles flow through a bend with a 80 degree angle, where the diameter of the bronchi is now 0.2 mm, the flow rate is only  $1 \text{ cm}^3$  per second and the mean free path of the air is 125 nm due to even lower pressure. Which dimensionless number determines whether the inhaled particles follow the flow field through that bend? Calculate the slip correction and the fraction of particles passing through the bend **(3 Pts.)**
  - The smoker exhales a plume of 50 nm particles in a perfectly straight line in front of them, and the cloud begins to dissipate by Brownian displacement. 5 minutes later, what is the concentration gradient  $dn/dx$  at  $x=0$ , in units of  $n_0$  per centimeter. Assume no turbulence or air motion of any kind during your answer. **(2 Pts.)**

## Tähtitieteen perusteet I - Loppukoe 16.12.2015

- Selitä lyhyesti mitä seuraavat käsitteet tarkoittavat. (1p/kohta)
  - Kohteen tuntikulma
  - Nutaatio (koordinaatteihin vaikuttavana tekijänä)
  - Planeetta
  - Vuontiheys
  - Aurinkotuuli
  - Tähtiaika
- Selitä viivasäteilyn ja kontinuumisäteilyn syntymekanismeja ja anna esimerkkejä tähtitieteellisistä kohteista jotka lähettävät näitä säteilytyyppejä. (6p)
- Kuva esittää osaa planeetan radasta aurinkokunnassa. Punainen symboli ("P") kuvaa planeetan paikkaa perihelissä ja ylempi sininen symboli sen tämänhetkistä sijaintia. Luettele mitä rataa liittyviä asioita kuvaan on merkitty ja mitä ne tarkoittavat. (6p)



4. Super<sup>v</sup>novan absoluuttinen magnitudi on  $M_V = -18$  mag ja tähden kirkkaus ennen räjähdystä  $M_V = -5.0$  mag. Kuinka monikertaiseksi kohteen luminositeetti kasvoi? Supernovan näennäiseksi magnitudiksi mitattiin  $m_V = +12$  mag: arvioi sen etäisyys. Tähtienvälinen ekstinktio jätetään tässä huomiotta mutta totea kuitenkin sen periaatteellinen vaikutus. Voisiko etäisyyden mitata suoraan parallaximenetelmällä? (6p)

5. Komeetta Churyumov-Gerasimenkon massa on  $1 \times 10^{13}$  kg. Jos Rosetta luotain kiertäisi komeettaa 10km etäisyydelle, mikä olisi sen kiertoaika? Millä etäisyydellä Auringosta komeetan pintalämpötila tippuu alle  $-50^\circ\text{C}$  ( $\sim 223\text{K}$ )? (6p)

†  $1 \text{ parsek} = 3.09 \times 10^{16} \text{ m} = 206265 \text{ AU}$  † Auringon säde  $R_\odot = 0.00465 \text{ AU}$   
 † Auringon efektiivinen lämpötila  $T_e = 5780\text{K}$  † Aurinkovakio  $1400 \text{ W/m}^2$   
 † Stefanin-Boltzmannin vakio  $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$

Physics of monte carlo simulations, 8, 5, 2024  
MATR323

- ① Explain random walks and what it means when they are continuous or lattice based. Also what does it mean when a walk is b) persistent, c) biased
- ② Explain the idea and principle of weighting in particle transport or in the Rosenbluth-Rosenbluth method. Explain how the weight is calculated in either method.
- ③ Illustrate and explain how KMC works. You get the rates  $\Gamma_1 = 0,5$ ,  $\Gamma_2 = 0,6$  and  $\Gamma_3 = 0,4$ .
- ④ How can the metropolis monte carlo method compute states in an NVT ensemble, How should you change this to compute a NPT ensemble?
- ⑤ Chose one of the following:
  - a) Derive the metropolis algorithm as thoroughly as in the lecture notes as well as you remember.
  - b) Nijo kvantum monte carlo metropolis skit.

Mark V21! Man fick inte ta med tenten så frågorna är inte ord för ord. Uppgifterna är dock så godt som gott det samma som frågades i provet.

You may answer in Finnish, Swedish, or English. Do problems 2 and 3 each on a different sheet of paper. Remember to put your name and student number on every separate sheet of paper. It is not enough to do calculations; an explanation about what is being done is needed also. Using a calculator is allowed. Exam time is 4 hours.

1. Calculate the age-redshift relation, the comoving-distance-redshift relation, the present age and the horizon distance (in units of  $H_0^{-1}$ ) in the radiation-dominated universe ( $\Omega_r = \Omega_0 = 1$ ).
2. Find  $H(z)$  for a non-flat ( $\Omega_k \neq 0$ ) universe, which contains matter, radiation, and dark energy (instead of vacuum energy), where the dark energy equation of state is given by

$$w(a) = w_0 + w_a(1 - a),$$

$a$  is the scale factor normalized to 1 today, and  $w_0$  and  $w_a$  are constants.

3. We say the universe is transparent when the photon mean free path  $\lambda_\gamma$  is larger than the Hubble length  $l_H = H^{-1}$ , and opaque when  $\lambda_\gamma < l_H$ . The photon mean free path is  $\lambda_\gamma = 1/(\sigma_T n_e)$ , where  $n_e = x n_e^*$  is the number density of free electrons,  $n_e^*$  is the total number density of electrons, and  $x$  is the ionization fraction. The cross section for photon-electron scattering is  $\sigma_T = \frac{8\pi}{3}(\alpha/m_e)^2$ , where  $\alpha = 1/137$  is the fine-structure constant. In recombination  $x$  falls from 1 to  $10^{-4}$ . Assume an instantaneous recombination at  $1 + z = 1300$ . Show that the universe is opaque before recombination and transparent after recombination. Assume a matter-dominated universe with  $\Omega_m = 1.0$  (note that  $\Omega_m$  includes nonbaryonic matter),  $\Omega_\Lambda = 0$ ,  $h = 0.7$ , and  $\eta = 4 \times 10^{-10}$ . You may ignore neutrons, i.e., assume that ordinary matter is all hydrogen.
4. Calculate how much  ${}^4\text{He}$  is formed in Big Bang nucleosynthesis, using a simple model, where the neutrinos decouple instantaneously at  $T = 0.9$  MeV, and the nucleosynthesis happens instantaneously at  $T = 0.07$  MeV. Assume  $\mu_n = \mu_p$  before neutrino decoupling. (You can use  $g_* = 3.384$  for the whole time period).
5. Write an essay (max 500 words) on the events in the early universe during the temperature range  $T = 10$  MeV  $\rightarrow$  0.1 eV. No calculations or complicated equations expected.

Energy continuity equation:

$$\dot{\rho} = -3(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a}$$

You may answer in Finnish, Swedish, or English. Return your solutions into two separate piles: one for problems 1 and 3; the other for problems 2, 4, and 5. Remember to put your name and student number on every separate sheet of paper. It is not enough to do calculations; an explanation about what is being done is needed also. Using a calculator is allowed. Exam time is 4 hours.

1. Demonstrate that the two conditions,

$$\varepsilon(\varphi) \equiv \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1 \quad \text{and} \quad |\eta(\varphi)| \equiv \left| M_{\text{Pl}}^2 \frac{V''}{V} \right| \ll 1,$$

are necessary conditions for the slow-roll approximation to be valid. Why are these conditions not sufficient?

2. The matter density 2-point correlation function is defined  $\xi(\mathbf{r}) \equiv \langle \delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}+\mathbf{r}) \rangle$ . The galaxy 2-point correlation function  $\xi_g(\mathbf{r})$  is defined as the excess probability of finding a galaxy at separation  $\mathbf{r}$  from another galaxy:  $dP \equiv \bar{n} [1 + \xi_g(\mathbf{r})] dV$ , where  $\bar{n}$  is the mean galaxy number density,  $dV$  is a volume element that is a separation  $\mathbf{r}$  away from a chosen reference galaxy, and  $dP$  is the probability that there is a galaxy within  $dV$ . Assume that the galaxy number density  $n(\mathbf{x})$  is a biased tracer of matter density:  $\delta_g \equiv \delta n / \bar{n} = b\delta \equiv b\delta\rho_m / \bar{\rho}_m$ , where  $b$  is a constant. Show that  $\xi_g$  and  $\xi$  are related and find the relation between them.

3. Matter density perturbations  $\delta \equiv \delta\rho_m / \bar{\rho}_m$  evolve according to the Jeans equation

$$\ddot{\delta}_{\mathbf{k}} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{\mathbf{k}} + \frac{k^2}{a^2} \frac{\delta p_{\mathbf{k}}}{\bar{\rho}_m} - 4\pi G\bar{\rho}_m\delta_{\mathbf{k}} = 0,$$

when perturbations in other density components can be ignored. Find the solution for the Jeans equation for pressureless matter perturbations when there is no other energy component, but the universe has the open geometry ( $K < 0$ ) and is totally curvature dominated, i.e., we assume  $\Omega_0 = \Omega_m \ll 1$ , so that we can use the curvature-dominated ( $\Omega_0 = 0$ ) background solution, considering only scales  $\ll$  curvature radius.

4. The CMB temperature anisotropy can be expanded in terms of spherical harmonics as

$$\frac{\delta T}{T_0}(\theta, \phi) = \sum a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi).$$

The variance of the multipole coefficients  $a_{\ell m}$  is called the angular power spectrum  $C_\ell$ .

(a) Show that

$$\left\langle \left( \frac{\delta T(\theta, \phi)}{T_0} \right)^2 \right\rangle = \sum_{\ell} \frac{2\ell + 1}{4\pi} C_\ell.$$

Explain the meaning of the angle brackets  $\langle \cdot \rangle$  in this context.

(b) Show that

$$\frac{1}{4\pi} \int \left( \frac{\delta T(\theta, \phi)}{T_0} \right)^2 d\Omega = \sum_{\ell} \frac{2\ell + 1}{4\pi} \hat{C}_\ell.$$

Explain the meaning of the "hat" notation  $\hat{\cdot}$  in this context.

5. Write an essay (max 500 words) on (cosmological) inflation (no calculations). Grading of the essay will consider how well all important aspects were covered.

**Table 1: The particles in the standard model of particle physics**  
*Particle Data Group, 2022*

Quarks	$t$	$172.69 \pm 0.30 \text{ GeV}$	$\bar{t}$	spin= $\frac{1}{2}$	$g = 2 \cdot 3 = 6$	<hr/>
	$b$	$4.16\text{--}4.21 \text{ GeV}$	$\bar{b}$	3 colors		
	$c$	$1.27 \pm 0.02 \text{ GeV}$	$\bar{c}$			
	$s$	$90\text{--}102 \text{ MeV}$	$\bar{s}$			
	$d$	$4.50\text{--}5.15 \text{ MeV}$	$\bar{d}$			
	$u$	$1.90\text{--}2.65 \text{ MeV}$	$\bar{u}$			
						72
Gluons	8 massless bosons			spin=1	$g = 2$	16
Leptons	$\tau^-$	$1776.86 \pm 0.12 \text{ MeV}$	$\tau^+$	spin= $\frac{1}{2}$	$g = 2$	<hr/>
	$\mu^-$	$105.658 \text{ MeV}$	$\mu^+$			
	$e^-$	$510.999 \text{ keV}$	$e^+$			
						12
	$\nu_\tau$	$< 1.1 \text{ eV}$	$\bar{\nu}_\tau$	spin= $\frac{1}{2}$	$g = 1$	<hr/>
	$\nu_\mu$	$< 1.1 \text{ eV}$	$\bar{\nu}_\mu$			
	$\nu_e$	$< 1.1 \text{ eV}$	$\bar{\nu}_e$			
						6
Electroweak gauge bosons	$W^+$	$80.377 \pm 0.012 \text{ GeV}$	$W^-$	spin=1	$g = 3$	<hr/>
	$Z^0$	$91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV}$				
	$\gamma$	$0 \text{ } (< 1 \times 10^{-18} \text{ eV})$			$g = 2$	
						11
Higgs boson	$H^0$	$125.25 \pm 0.17 \text{ GeV}$		spin=0	$g = 1$	1
						<hr/>
						$g_f = 72 + 12 + 6 = 90$
						$g_b = 16 + 11 + 1 = 28$
						$g_* = \frac{7}{8}g_f + g_b = 106.75$

**Table 2: History of  $g_*(T) \equiv 30\rho/(\pi^2T^4)$**

$T \sim 200 \text{ GeV}$	all present	106.75	
$T \sim 100 \text{ GeV}$	EW transition	(no effect)	
$T < 170 \text{ GeV}$	top annihilation	96.25	
$T < 80 \text{ GeV}$	$W^\pm, Z^0, H^0$	86.25	
$T < 4 \text{ GeV}$	bottom	75.75	
$T < 1 \text{ GeV}$	charm, $\tau^-$	61.75	
$T \sim 150 \text{ MeV}$	QCD transition	17.25	(u,d,s,g $\rightarrow$ $\pi^{\pm,0}$ , 47.5 $\rightarrow$ 3)
$T < 100 \text{ MeV}$	$\pi^\pm, \pi^0, \mu^-$	10.75	$e^\pm, \nu, \bar{\nu}, \gamma$ left
$T < 500 \text{ keV}$	$e^-$ annihilation	(7.25)	$2 + 5.33(4/11)^{4/3} = 3.38$

### Taulukko 1: Standardimallin hiukkaset

Particle Data Group, 2022

Kvarkit	$t$	$172.69 \pm 0.30 \text{ GeV}$	$\bar{t}$	spin= $\frac{1}{2}$ 3 väriä	$g = 2 \cdot 3 = 6$	
	$b$	$4.16\text{--}4.21 \text{ GeV}$	$\bar{b}$			
	$c$	$1.27 \pm 0.02 \text{ GeV}$	$\bar{c}$			
	$s$	$90\text{--}102 \text{ MeV}$	$\bar{s}$			
	$d$	$4.50\text{--}5.15 \text{ MeV}$	$\bar{d}$			
	$u$	$1.90\text{--}2.65 \text{ MeV}$	$\bar{u}$			
						72
Gluonit	8 massatonta bosonia			spin=1	$g = 2$	16
Leptonit	$\tau^-$	$1776.86 \pm 0.12 \text{ MeV}$	$\tau^+$	spin= $\frac{1}{2}$	$g = 2$	
	$\mu^-$	$105.658 \text{ MeV}$	$\mu^+$			
	$e^-$	$510.999 \text{ keV}$	$e^+$			
						12
	$\nu_\tau$	$< 1.1 \text{ eV}$	$\bar{\nu}_\tau$	spin= $\frac{1}{2}$	$g = 1$	
	$\nu_\mu$	$< 1.1 \text{ eV}$	$\bar{\nu}_\mu$			
	$\nu_e$	$< 1.1 \text{ eV}$	$\bar{\nu}_e$			
						6
Sähköheikot mittabosonit	$W^+$	$80.377 \pm 0.012 \text{ GeV}$	$W^-$	spin=1	$g = 3$	
	$Z^0$	$91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV}$				
	$\gamma$	$0 \text{ } (< 1 \times 10^{-18} \text{ eV})$				$g = 2$
						11
Higgsin bosoni	$H^0$	$125.25 \pm 0.17 \text{ GeV}$		spin=0	$g = 1$	1
						$g_f = 72 + 12 + 6 = 90$ $g_b = 16 + 11 + 1 = 28$ $g_* = \frac{7}{8}g_f + g_b = 106.75$

### Taulukko 2: $g_*(T)$ :n historia

$T \sim 200 \text{ GeV}$	kaikki	106.75	
$T \sim 100 \text{ GeV}$	EW-transitio	(ei vaikutusta)	
$T < 170 \text{ GeV}$	top-annihilaatio	96.25	
$T < 80 \text{ GeV}$	$W^\pm, Z^0, H^0$	86.25	
$T < 4 \text{ GeV}$	b-kvarkki	75.75	
$T < 1 \text{ GeV}$	lumo, $\tau^-$	61.75	
$T \sim 150 \text{ MeV}$	QCD-transitio	17.25	(u,d,s,g $\rightarrow \pi^{\pm,0}$ , 47.5 $\rightarrow$ 3)
$T < 100 \text{ MeV}$	$\pi^\pm, \pi^0, \mu^-$	10.75	$e^\pm, \nu, \bar{\nu}, \gamma$ jäljellä
$T < 500 \text{ keV}$	$e^-$ -annihilaatio	(7.25)	$2 + 5.33(4/11)^{4/3} = 3.38$



$$\begin{aligned}
 1 \text{ eV} &= 11600 \text{ K} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J} = 5.07 \times 10^6 \text{ m}^{-1} = 1.52 \times 10^{15} \text{ s}^{-1} = 1.78 \times 10^{-36} \text{ kg} \\
 c &= 1 = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s} & M_{\odot} &= 1.99 \times 10^{30} \text{ kg} \\
 \hbar &= 1 = 197 \text{ MeVfm} & \zeta(3) &= 1.20206 \\
 1 \text{ pc} &= 3.09 \times 10^{16} \text{ m} = 3.26 \text{ a} & m_{\text{Pl}} &\equiv G^{-1/2} = 1.22 \times 10^{22} \text{ MeV} \\
 1 \text{ a} &= 3.156 \times 10^7 \text{ s} & M_{\text{Pl}} &\equiv (8\pi G)^{-1/2} = 2.435 \times 10^{21} \text{ MeV} \\
 h &\equiv H_0/(100 \text{ km/s/Mpc}) & g_n &= g_p = g_e = 2, \quad g_H = 4 \\
 (100 \text{ km/s/Mpc})^{-1} &= 9.78 \times 10^9 \text{ a} = 2998 \text{ Mpc} & Q &= m_n - m_p = 1.293 \text{ MeV} \\
 T_0 &= 2.7255 \text{ K} = 2.349 \times 10^{-4} \text{ eV} & g_*(T \ll m_e) &= 3.384 \\
 T_{\nu 0} &= (4/11)^{1/3} T_0 & g_{*S}(T \ll m_e) &= 3.938 \\
 z_{\text{dec}} &= 1090 & g_*(1 \text{ MeV}) &= g_{*S}(1 \text{ MeV}) = 10.75 \\
 m_e &= 0.511 \text{ MeV} & \tau_n &= t_{1/2}/\ln 2 = 878 \text{ s} \\
 m_N &= 938 \text{ MeV} & n + \nu_e &\leftrightarrow p + e^- \\
 m_p + m_e - m_H &= 13.6 \text{ eV} & \mu_e \ll T &\quad (\text{kun/when } T > 30 \text{ keV})
 \end{aligned}$$

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right)$$

$$f(\vec{p}) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} \pm 1}$$

$$\mathcal{R} = -H \frac{\delta\varphi}{\dot{\varphi}}$$

$$n_i = \left\{ \frac{1}{3/4} \right\} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g_i T^3, \quad (T \gg m_i)$$

$$\mathcal{P}_g(k) \equiv \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3 4\pi k^3 \langle |g_{\mathbf{k}}|^2 \rangle$$

$$n_i = g_i \left( \frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_i - \mu_i}{T}}, \quad (T \ll m_i)$$

$$\left( \frac{2\pi}{L} \right)^3 \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int d^3 k$$

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho$$

$$\mathcal{P}_{\varphi}(k) = \left( \frac{H}{2\pi} \right)_{|aH=a_0 k}^2$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p)$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \left( \frac{H}{\dot{\varphi}} \right)^2 \left( \frac{H}{2\pi} \right)_{|aH=a_0 k}^2$$

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4$$

$$n_s(k) - 1 \equiv \frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln k}$$

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_{*S} T^3$$

$$\left( \frac{\delta T}{T} \right)_{\text{obs}} = \frac{1}{4} \delta_{\gamma}^N - \mathbf{v}^N \cdot \hat{\mathbf{n}} + \Phi(t_{\text{dec}}, \mathbf{x}_{\text{ls}}) + 2 \int \dot{\Phi} dt$$

$$g_*^{1/2} t T^2 = 0.301 m_{\text{Pl}}$$

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = 4\pi \sum_{lm} i^l j_l(kx) Y_{lm}(\hat{\mathbf{x}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}})$$

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \nabla \varphi^2 + V(\varphi)$$

$$\Phi_{\mathbf{k}} \equiv -\frac{3}{2} \left( \frac{aH}{a_0 k} \right)^2 \delta_{\mathbf{k}}$$

$$\ddot{\varphi} - \frac{1}{a^2} \nabla^2 \varphi + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0$$

$$\Phi_{\mathbf{k}} = -\frac{3 + 3w}{5 + 3w} \mathcal{R}_{\mathbf{k}}, \quad (w \equiv p/\rho)$$

$$n - \bar{n} = \frac{gT^3}{6\pi^2} \left[ \pi^2 \left( \frac{\mu}{T} \right) + \left( \frac{\mu}{T} \right)^3 \right], \quad (T \gg m)$$

$$\int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{l'm'}(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

$$n - \bar{n} = 2g \left( \frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-m/T} \sinh \frac{\mu}{T}, \quad (T \ll m)$$

$$\sum_m |Y_{lm}(\theta, \phi)|^2 = \frac{2l + 1}{4\pi}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{z} j_l(z)^2 = \frac{1}{2l(l+1)}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \tilde{\Phi} = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\nabla^2 \tilde{\Phi} = 4\pi G \rho$$

## Kvanttistatistiikan loppukoe 10.5.2022

Vastaa jokaiseen tehtävään omalle arkilleen ja kirjoita nimesi ja opiskelijanumerosi selkeästi kunkin arkin ensimmäiselle sivulle. Kaikki tarvittavat apukaavat on annettu koepaperin kääntöpuolella.

Jos olet oikeutettu lisäaikaan, jätä yksi vapaavalintainen tehtävä tekemättä ja kirjoita maininta lisäajasta sen kohdalle. Valinnassa kannattaa ottaa huomioon, että neljänestä tehtävästä on saatavissa kaksi lisäpistettä, joita ei lasketa kokeen maksimipistemäärään (32).

1. Vastaa lyhyesti seuraaviin kysymyksiin.

- Käyttäen hyväksi tietoa miehityslukuoperaattorin  $\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$  odotusarvoista määrittele Fockin avaruuden ns. miehityslukukanta vuorovaikuttamattomalle monihiukkassysteemille. Kirjoita myös systeemin Hamiltonin funktio ja selitä, miten se operoi määrittellemillesi kantatiloille. Voit olettaa yksihiukkasenergiat tunnetuiksi. (2p)
- Mitä tarkoitetaan puhtaalla kvanttimekaanisella tilalla ja sekatilalla? Mitä ominaisuuksia tiheysoperaattorilta vaaditaan? (2p)
- Kuvaile, mitä identifikaatioita statististen ja termodynaamisten suureiden välillä on tehtävä, jotta monihiukkassysteemin statistinen kuvailu on konsistenttia lämpöopin 1. pääsäännön kanssa. (2p)
- Mitä tarkoitetaan tietyn vapausasteen virittymisellä tietyn lämpötilan ympärillä? Anna tästä jokin esimerkki. (2p)

2. Vastaa seuraaviin kysymyksiin hieman monisanaisemmin.

- Määrittele kvanttimekaanisen systeemin tilatiheysfunktio  $\omega(E)$ . Lähtien liikkeelle siitä tiedosta, että  $V = L^3$  kokoiseen laatikkoon suljetun vapaan kvanttimekaanisen hiukkasen mahdolliset impulssit saavat muodon  $\mathbf{p} = \frac{\hbar}{L}(n_x, n_y, n_z)$ ,  $n_i \in \mathbf{Z}$ , osoita, että ei-relativistisen  $m$ -massaisen hiukkasen tilatiheys jatkumorajalla on  $\omega_1(E) = C_1 V \sqrt{E}$ , jossa vakio  $C_1 = \frac{2\pi g}{h^3} (2m)^{3/2}$  ja  $g$  (yleensä spiniin liittyvä) degeneraatiotekijä. (2p)
- Aloittaen Bose-Einstein-miehityslukufunktion muodosta sekä klassisesta tuloksesta

$$N = g \left( \frac{2\pi m}{h^2} \right)^{3/2} V e^{\beta\mu} T^{3/2}$$

selitä, milloin bosonisen monihiukkassysteemin ominaisuudet palautuvat klassisiksi. (3p)

- Lähtien liikkeelle partitiofunktion määritelmästä suurkanonisessa jakaumassa johda tulos  $\Omega(T, V, \mu) = \pm T \sum_i \ln \{1 \mp e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}\}$  suurelle potentiaalille vuorovaikuttamattomassa bosonisessa ja fermionisessa monihiukkassysteemissä. (3p)

3. Tarkastellaan vuorovaikuttamatonta systeemiä, joka koostuu parillisesta määrästä  $N$  spin-1/2 hiukkasia, jotka on kiinnitetty kiinteisiin hilapisteisiin. Merkitsemällä hiukkasen  $i$  spinin  $z$ -komponenttia muuttujalla  $s_{i,z} = \pm \hbar/2$  systeemin kokonaisspin  $z$ -suuntaan saa muodon  $S_z = \sum_i s_{i,z} = m\hbar$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N/2$ . Jos systeemi on kytketty ulkoiseen  $z$ -suuntaiseen magneettikenttään,  $\mathbf{H} = H\mathbf{e}_z$ , voidaan sen kokonaisenergia lukea tällöin kaavasta

$$E(m) = -\mu_0 H \gamma \sum_i s_{i,z} = \underbrace{-(\mu_0 \gamma \hbar H)}_{\epsilon} m \equiv -m\epsilon,$$

missä  $\mu_0$  vastaa tyhjiön permittiivisyyttä sekä  $\gamma$  magnetogyristä suhdetta. Määritä tälle systeemille ison  $N$ :n rajalla

- a. tilatiheys  $\omega(E)$ , (3p)
- b. mikrokanoninen entropia  $S(E)$ , (2p)
- c. kokonaisenergia lämpötilan funktiona. (3p)

4. Vastaa seuraaviin kysymyksiin.

- a. Kuvaile ilman laskuja, kuinka bosekondensaatiota läpikäyvä systeemi käyttäytyy, kun sitä puristetaan rajatta kokoon vakio­lämpötilassa. Selitä, mistä käytös johtuu ja hahmottele systeemin faasidiagramman muoto  $pV$ -tasossa vakio­lämpötilan käyriä käyttäen. (4p)
- b. Osoita, että hieman kriittistä lämpötilaa  $T_c$  korkeammilla lämpötiloilla ideaalisen bose­kaasun kemiallista potentiaalia voi approksimoida kaavalla (4p)

$$\mu \approx - \left[ \frac{\zeta(3/2)}{2\sqrt{\pi}} \right]^2 T_c \left[ \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2} - 1 \right]^2 .$$

Vihje: seuraavasta integraalista, jossa  $\epsilon$  on pieni positiivinen reaaliluku, voi olla hyötyä:

$$\int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1 + \epsilon} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \zeta(3/2) - \pi\sqrt{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon) .$$

- c. Bonus: Johda tehtävän b-kohdassa annettu integraalikaava. (2 lisäpistettä)

Vihje: Yksi tapa ekspandoida tällaista integraalia pienen  $\epsilon$ :n rajalla on jakaa integroimisalue kahteen osaan  $[0, \delta]$  ja  $[\delta, \infty]$ , missä  $0 < \epsilon \ll \delta \ll 1$ . Ensimmäisellä välillä voit käyttää hyväksi sitä, että  $x \ll 1$  kaikkialla, ja jälkimmäisellä taas sitä, että integrandia voi tässä alueessa ekspandoida  $\epsilon$ :n potenssisarjana.

### Mahdollisesti hyödyllisiä kaavoja

$$\begin{aligned} \delta U &= T\delta S - \delta W , \\ F_i &\equiv - \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial x_i} \right\rangle , \\ \lambda_T &\equiv \sqrt{\frac{h^2}{2\pi m T}} , \\ p (N/V)^{5/3} |_{T=T_c} &= \frac{h^2}{2\pi m T} \frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)^{5/3}} , \\ F &= - \frac{VT}{\lambda_T^3} g_{5/2}(1) , \\ \ln N! &\approx N \ln N - N , \\ \beta &= \frac{\partial S}{\partial E} , \\ Z_G &= \text{Tr} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} , \\ \Gamma(x) &\equiv \int_0^\infty dt t^{x-1} e^{-t} , \\ \zeta(x) &\equiv \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^x} , \\ \int dx \frac{\sqrt{x}}{x + \epsilon} &= 2\sqrt{x} - 2\sqrt{\epsilon} \arctan(\sqrt{x/\epsilon}) . \end{aligned}$$

**1. Generic**

- a) Write the full electron configuration of Mg ( $Z=12$ ). Draw the electron level diagram as a function of electron energy, and mark the spin up and spin down electrons occupying the shells. (2p)
- b) What are the three primary chemical bonding types? Give 1-2 sentences of explanation of each. (3p)
- c) What does it mean when we say that "crystal = lattice + basis"? (1p)
- d) Describe the classification of composites in four categories based on the reinforcing material's structure. Give 1-2 sentences of explanation of each. (4p)

**2. Crystal Structures**

- a) Draw the conventional unit cells of the following crystal structures (3 p)
  - i. Face Centered Cubic (FCC)
  - ii. Body Centered Cubic (BCC)
  - iii. Hexagonal Close Packed (HCP)
- b) Assuming the radius of an aluminium ion to be 0.143 nm, molar weight 26.982 g/mol and an FCC crystal structure in ambient conditions, determine the density of aluminium. (3p)  
Avogadro's number  $N_A=6.022 \cdot 10^{23}$  /mol.  
Does your answer make physically sense (think of your everyday experiences?)

**3. Mechanical properties**

- a) Name and explain the three points labeled A, B ja C in the stress-strain graph on the last page. (3p)
- b) Based on the above-mentioned graph, determine which one of the materials 1-4 is the toughest, stiffest, most brittle, and most ductile. Justify your answers. (2p)
- c) Determine the Young's modulus of material 4. (1p)

**4. Phase diagrams**

- a) Examine the Al-Ni phase diagram on the other page.  
Explain the symbols  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  and L. (2 p)
- b) The system with 20 wt% Ni is initially at 1000°C. Determine the phase transition temperatures, identify the phases and calculate their compositions and mass fractions, as the system is slowly cooled down to 500°C. (4p)

## 5. Solidification

- a) What is the total free energy and how is it related to material solidification? (2p)
- b) Starting from the definition of the total free energy change in phase transformation:

$$\Delta G = \frac{4}{3}\pi r^3 \Delta G_v + 4\pi r^2 \gamma$$

derive the following formulas for critical nucleus radius  $r^*$  and activation free energy  $\Delta G^*$ . Explain all the symbols used in the formulas. (4p)

$$\Rightarrow r^* = \left(-\frac{2\gamma T_m}{\Delta H_f}\right) \left(\frac{1}{T_m - T}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta G^* = \left(\frac{16\pi\gamma^3 T_m^2}{3\Delta H_f^2}\right) \frac{1}{(T_m - T)^2}$$

In order to get full points, eliminate the variable  $\Delta G_v$  from the final answer.

## 6. Polymers

- a) What are the typical bonding mechanisms prevailing in polymer materials and between which structural units they act? (2p)
- b) What is meant by linear, branched, cross-linked and network polymers? What are typical properties in which they differ from each other and why? (2p)
- c) What are the four main classifications of copolymers according to how different monomer units are distributed in them? (2p)

$$L: V \rightarrow W$$
$$L^T: W^* \rightarrow V^*$$

$$L^T V = W$$
$$V^* L^T = W^*$$

$$L^T L: V \rightarrow W$$

**1. Yleistä**

- a) Kirjoita alkuaineen Mg ( $Z=12$ ) täysi elektronikonfiguraatio . Piirrä elektronitasojen diagrammi energian funktiona ja merkitse spin ylös- ja spin alas-elektronit kullakin kuorella. (2p)
- b) Mitkä ovat primaariset kemialliset sidostyypit (3 kpl)? Anna jokaisesta 1-2 lauseen selitys. (3p)
- c) Mitä tarkoitetaan, kun sanotaan, että "kide = hila + kanta"? (1p)
- d) Kuvaile komposiittien luokittelu neljään kategoriaan vahvistavan materiaalin rakenteen mukaan. Anna jokaisesta 1-2 lauseen selitys. (4p)

**2. Kiderakenteet**

- a) Luonnostelet (piirrä) seuraavien kiderakenteiden yksikkökopit (3 p)
  - i. Pintakeskinen kuutiollinen (Face Centered Cubic, FCC)
  - ii. Tilakeskinen kuutiollinen (Body Centered Cubic, BCC)
  - iii. Heksagoninen tiivispakkaus (Hexagonal Close Packed, HCP)
- b) Olettaen alumiini-ionin säteeksi 0.143 nm, moolimassaksi 26.982 g/mol ja kiderakenteeksi FCC normaaliolosuhteissa, määritä alumiinin tiheys. (3p)  
Avogadron luku  $N_A=6.022 \cdot 10^{23}$  /mol.  
Onko vastauksesi fysikaalisesti järkevä? (Mieti jokapäiväisiä kokemuksia)

**3. Mekaaniset ominaisuudet**

- a) Selitä toisen sivun jännitys-venymä -käyrään merkityt pisteet A, B ja C. (3p)
- b) Saman kuvaajan perusteella, määritä mikä materiaaleista on lujin, jäykin, haurain ja venyvin (2p)
- c) Määritä materiaalin 4 kimmokerroin. (1p)

**4. Faasidiagrammit**

- a) Tarkastele toisen sivun Al-Ni-faasidiagrammia. Selitä symbolit  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  and L. (2p)
- b) Ni 20 wt% -systeemi on alun perin lämpötilassa 1000°C. Määritä faasitransitioiden lämpötilat, tunnista faasit ja laske niiden kompositiot sekä massaosuudet, kun systeemiä viilennetään hitaasti lämpötilaan 500°C. (4p)

## 5. Kiinteytyminen

- Mikä on muodostumisen vapaa energia (total free energy) ja miten se liittyy materiaalien kiinteytymiseen? (2p)
- Lähtien muodostumisen vapaan energian  $\Delta G$  määritelmästä:

$$\Delta G = \frac{4}{3}\pi r^3 \Delta G_{\text{vol}} + 4\pi r^2 \gamma$$

johda alla olevat kaavat kriittiselle ytimen säteelle  $r^*$  ja aktivaation vapaalle energialle (activation free energy)  $\Delta G^*$ . Selitä kaikki kaavoissa käytetyt symbolit. (4p)

$$\Rightarrow r^* = \left(-\frac{2\gamma T_m}{\Delta H_f}\right)\left(\frac{1}{T_m - T}\right)$$

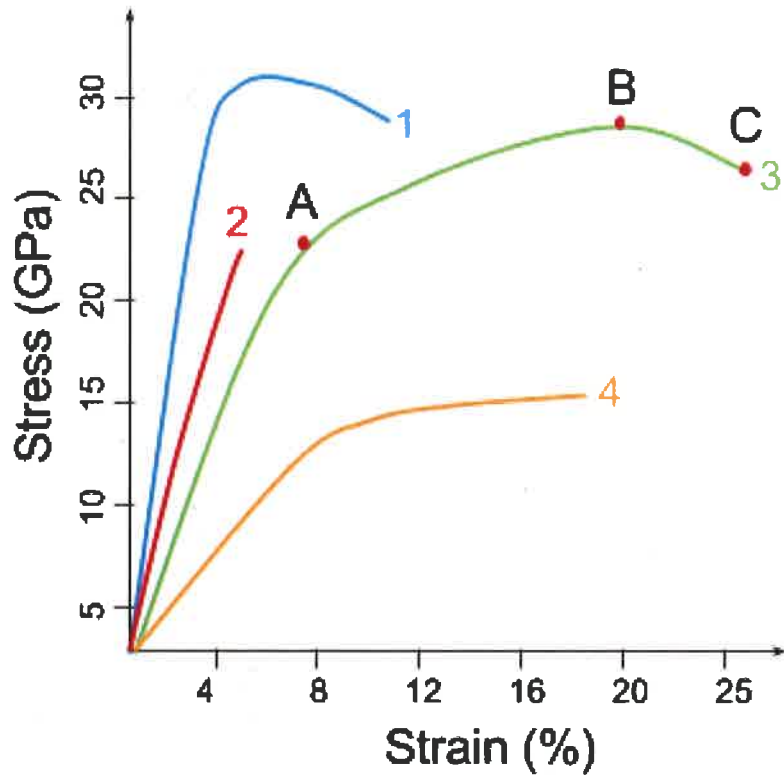
$$\Rightarrow \Delta G^* = \left(\frac{16\pi\gamma^3 T_m^2}{3\Delta H_f^2}\right)\frac{1}{(T_m - T)^2}$$

Täysien pisteiden saavuttamiseksi, älä jätä muuttujaa  $\Delta G$ , lopulliseen vastaukseen.

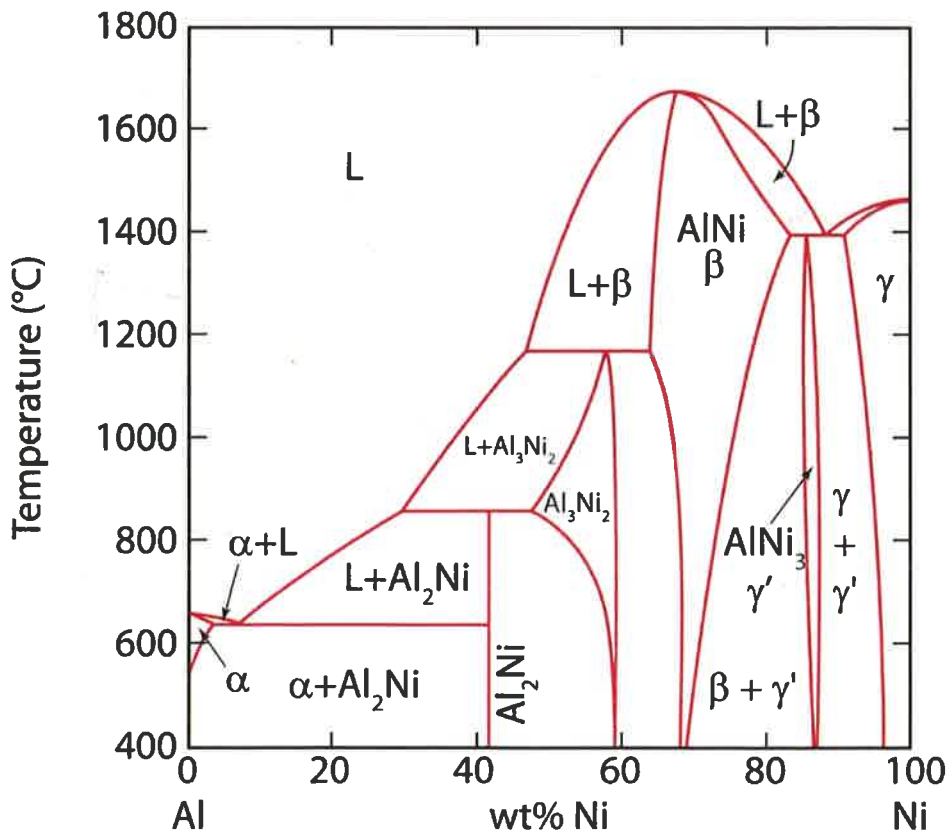
## 6. Polymeerit

- Mitkä ovat tyypilliset sidosmekanismit joita tavataan polymeerimateriaaleissa ja minkä rakenteellisten yksikköjen välillä ne vaikuttavat? (2p)
- Mitä tarkoitetaan lineaarisilla, haarautuneilla ja verkkopolymeereillä? Mitkä ovat niille tyypillisiä toisistaan poikkeavia ominaisuuksia, ja miksi? (2p)
- Mitkä ovat kopolymeerien neljä pääluokkaa jaoteltuna sen mukaan miten erityyppiset monomeerit ovat niissä jakautuneet? (2p)

Stress-strain graph for problem 4



Phase diagram for problem 5





---

## Introduction to Biological Physics (MATR331)

University of Helsinki

---

Examination: October 26, 2022 (6 exercises; maximum number of points is 30)

---

As to background information that is allowed during the examination:

- Calculator is ok

Further notes such as "lunttilappu" are not allowed.

### Assignment 1 [max. 3 points]

Define soft matter. Also discuss why entropy is often important in describing the properties of soft matter.

### Assignment 2 [max. 7 points]

Below are statements that are either true or false. Explain why they are (or why they are not) correct.

- a) Diffusion of lipids is rapid because it is fostered by ATP (adenosinetriphosphate).
- b) If we had a technology to generate short pieces of dsDNA (double stranded DNA), each having a length of 10 nm, we could use these short DNA fragments to make liquid crystals.
- c) Bacteria move like fish.
- d) Messages in the nervous system propagate by diffusion.
- e) Proteins in your cells, polyethylene, and alcohol which we can drink, are all polymers.
- f) If two dipoles (comprised of two charges  $-Q$  and  $+Q$ ) each), are separated by a distance of  $r$ , and their relative orientation is fixed, then the interaction  $V(r)$  between them decays like  $V(r) \sim 1/r^6$ .
- g) If Reynold's number ( $Re$ ) for a given fluid system is much larger than 1, then the fluid system in question is characterized by formation of turbulent flows, which however become weaker as the fluid velocity increases.

### Assignment 3 [max. 6 points]

Explain the following concepts, terms and phenomena. Use physical derivations, drawings, and/or essay-like descriptions to clarify the issue, when needed.

- a) With biomolecules, one often talks about the so-called entropic force. What is it?
- b) Mean field theory (keskikenttäteoria).
- c) Differential scanning calorimetry (DSC) is a technique often used to detect phase transitions taking place in cell systems. Why?
- d) In an aqueous environment, a long DNA molecule is intertwined into a ball, forming a spherical structure. Let us assume that this DNA ball would be transferred to oil. What would you expect to happen to it, and why?
- e) Discuss the role of gravitation in cell motion.
- f) Quite often diffusion, which describes particle motion, is called mobility. What are the differences between mobility and motility?

**Assignment 4 [max. 5 points]**

Consider a random walker moving along a line in one dimension. It performs jumps of distance  $L$ , each jump done with equal probability ( $1/2$ ) either to the left or the right. The period between consecutive jumps is always the same,  $\Delta t > 0$ , and  $t$  is time. Even for a system of many random walkers moving at the same time, one can consider the diffusion coefficient  $D$  of the random walkers using the ideal gas assumptions. Under these conditions, prove that the diffusion coefficient follows the law  $D \sim L^2 / t$ .

**Assignment 5 [max. 4 points]**

The orientational properties of liquid crystal molecules (among others) are described by the order parameter

$$S = A \langle \cos^2 \theta \rangle - B.$$

In two dimensions, calculate the appropriate values for the parameters  $A$  and  $B$  such that the order parameter is scaled between 0 (minimum value) and 1 (maximum value).

**Assignment 6 [max. 5 points]**

Suppose your body can be described with a cylinder 2 meters high and 30 cm in diameter. You are in great shape, like an Olympic athlete. When your lungs are full of air, the average density of your body is  $900 \text{ kg/m}^3$ . When your lungs are completely empty, the average density of your body is  $1100 \text{ kg/m}^3$ . You go to a lake with a water density of  $1000 \text{ kg/m}^3$ . You swim to the middle of the lake, stop in place, blow your lungs completely empty, and allow yourself to sink freely toward the bottom of the lake which is 10 meters below the surface level. What is the maximum speed  $V_{\text{max}}$  you will reach during this descent?

[Hint: keep in mind that the frictional force, slowing down the fall, has a magnitude of  $6\pi\eta R_{\text{size}}v$ , where  $\eta$  is viscosity of water,  $R_{\text{size}}$  describes your size, and  $v$  is your velocity during the fall.]

You will rise to the surface (or lifeguards will bring you back to the surface) and continue your journey into a shallow river where you can stand still so that your head is above the surface of the water. Water in the river flows past you at a speed of  $V_{\text{max}}$ . Under these circumstances, what size should you be so that the Reynolds number  $Re$  would be 1?

$$\frac{\eta}{\rho v}$$

These might be useful:

Taylor expansion

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Boltzmann constant  $1.380662 \cdot 10^{-23} \text{ J / K}$

1 amu =  $1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$  (atomic mass unit)

Avogadro's number  $6.022 \cdot 10^{23} \text{ 1/mol}$

permittivity of vacuum  $8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$  (or  $\text{coul}^2/\text{Nm}^2$ )

permittivity of water  $\approx 80$  times that of a vacuum

charge on a proton  $1.6 \cdot 10^{-19} \text{ coul}$

viscosity of water  $\eta = 10^{-3} \text{ kg / ms}$

viscosity of syrup  $\approx 3000$  times that of water

mass density of syrup  $\approx 1.4$  times that of water

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$\frac{dy}{dt} + Ay = B$ , where  $A, B$  are constants, is solved by  $y = y(t_0)e^{-At}e^{-B/A} + \frac{B}{A}e^{-At} + \frac{B}{A}$  ( $t_0 =$  initial time)

$$10^{-3} \text{ kg/ms} = \frac{10^{-27} \text{ kg}}{10^{-3} \text{ s}}$$

$$\frac{\text{kg}}{\text{ms}} = 10^{-3}$$

$$\frac{\text{kg}}{10^{-3} \text{ s}} = 10^{-3}$$

$$\frac{\text{kg}}{\text{s}} = 10^{-3} \cdot 10^{-3}$$

These might be useful, too:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

Taylor expansion

$$(1+x)^{-1/2} \approx 1 - (1/2)x + (3/8)x^2 + O(x^3) \text{ for } |x| < 1.$$

Poisson-Boltzmann equation in radial coordinates:

$$\frac{1}{r^2} \left[ \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{dV}{dr} \right] \right] = \kappa^2 V$$

Boltzmann constant:  $1.380662 \times 10^{-23} \text{ J / K}$ .

1 amu =  $1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$  (atomic mass unit)

# MATR332 Physics of Biological Physics

University of Helsinki, Spring 2023

Examination: March 09, 2023 (5 exercises; maximum number of points is 30)

As to background information that is allowed during the examination:

- MAOL or a guide with similar content is not allowed
- A sheet of notes (“luntilappu”) is not allowed
- Calculator is ok

Questions are in English but you can write down your answers in English or Finnish.

## Assignment 1 [max. 10 points]

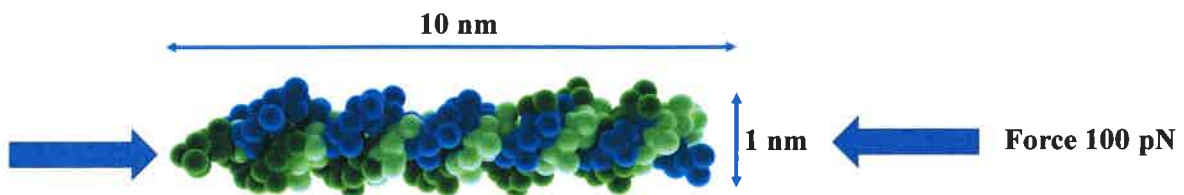
Please consider the below statements and conclude whether they are true, or not. Further, *justify your reasoning*.

- In a system under consideration, there is salt dissolved in a water liquid, interacting with a solid surface. The sodium ions of the salt are adsorbed (attached) to the charged surface. The temperature of the system is low, around 10 degrees Celsius. Now, if the system temperature is allowed to increase to reach room temperature (around 20 degrees Celsius), then changes in this system are capable of producing mechanical work.
- Consider a medium-sized fish swimming in a lake. Suddenly, as this medium-sized fish eats a small-sized fish as one mouthful, it becomes a Huge fish: its size increases by 50%, but at the same time the velocity of the fish decreases by 50%. Despite these changes, the Reynolds number characterizing the motion of the fish remains constant.
- You are working on your MSc thesis project. One of the tasks you need to do is to separate selected molecules (type A) from the other molecules (type B, C, ...) in this solution. To do this, you use sedimentation, and it works very well.
- Consider molecules found on planet X in liquid nitrogen at a temperature of +73 K. Assuming that the forces between the molecules under these conditions on planet X are similar to forces in liquid water at +37 degrees Celsius on planet Earth, then this implies that on Earth these molecules would be almost 10 times bigger than on planet X.
- You plan to use the equation of state of the ideal gas model to describe the behavior of a weakly interacting system, as the system temperature approaches zero Kelvin. Your 80-year-old grandmother (who has PhD in physics) says that “no chance, never going to work out”. Your grandmother is right.

## Assignment 2 [max. 5 points]

Collagen (see the attached image) is an important protein found, e.g., in connective tissue such as skin and bone. Its width (thickness) is about 1 nm, and its length is about 10 nm. It is quite rigid that is characterized by its Young modulus  $K = 2$  GPa. If we apply a force of 100 pN on this molecule, then how much will the length of this molecule change?

[Hint: The Young's modulus ( $E$ ) is a property of the material that tells us how easily it can stretch and deform and is defined as the ratio of tensile stress ( $\sigma$ ) to tensile strain ( $\epsilon$ ). where stress is the amount of force applied per unit area ( $\sigma = F/A$ ) and strain is extension per unit length ( $\epsilon = dl/l$ ).]

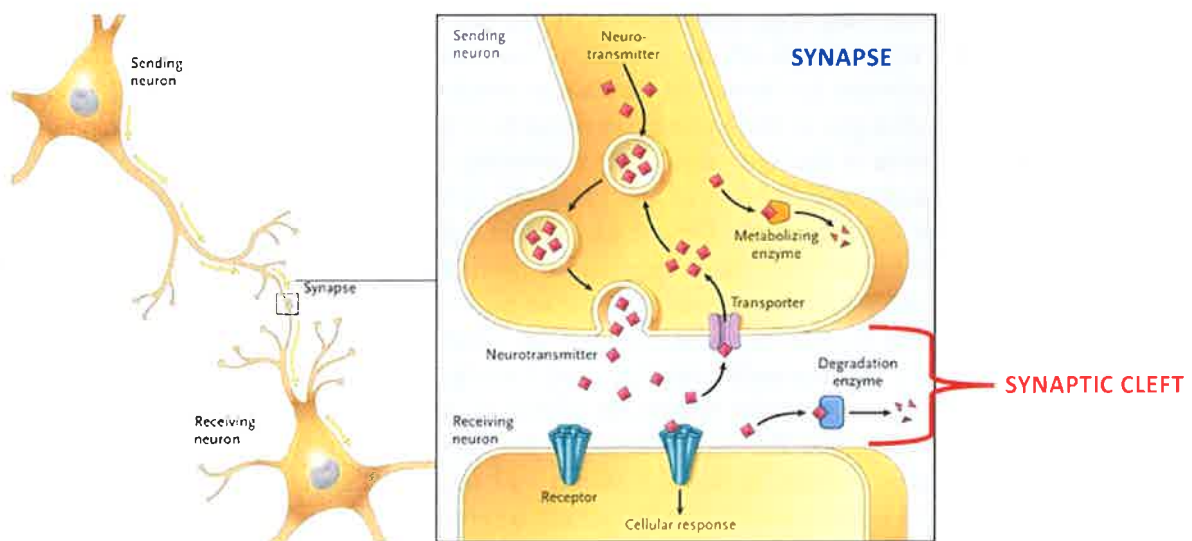


### Assignment 3 [max. 5 points]

When we decide to run, we must activate our muscles. The request for activation starts from our brain and propagates as a nerve impulse, and to activate the muscles in the feet, at least one meter of nerve propagation has to take place. This is not an immediate process, since even the best athletes have latency times of about 100 ms. One of the bottlenecks, slowing down nerve propagation, is to cross the synaptic cleft in a synapse (see the attached figure), since in nerve propagation the signal is transmitted by neurotransmitters that must cross the synaptic cleft. Their diffusion coefficient is about  $D = 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$ , and it seems obvious that the diffusion length that neurotransmitters should move in time  $t$  is therefore 50 nm.

Based on these pieces of information, estimate the time it takes for neurotransmitters to cross the synaptic cleft. Is it a significant portion of the latency time?

[Hint: What are the dimensions of the diffusion coefficient? Length squared over time.]



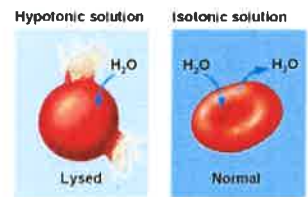
### Assignment 4 [max. 5 points]

1. During the course we discussed how bacteria and fish swim, and how their swimming depends on the Reynolds number. Now, estimate how fast (or slowly) should you swim in water so that you would not have to care about inertia (such that friction would dominate how you move)? Keep again in mind that the viscosity of water is  $1 \times 10^{-3} \text{ Ns} / \text{m}^2$ , and now the temperature is 293 K.
2. Consider two imaginary polymers. Polymer A has a persistence length of 50 nm. Polymer B has a persistence length of 2 nm. Now imagine that you could grab the polymer at two points separated by 10 nm and bend it. Which polymer would be easier to bend and why? If you would use these two polymers as models for single- and double-stranded DNA, which one would be a better model for which? Why?

### Assignment 5 [max. 5 points]

How much osmotic pressure (osmotic imbalance) does the cell membrane surrounding a cell withstand? To address this question, let us consider a cell exposed to an environment where there

is a lower concentration of osmolites than inside the cell. Under these circumstances, water will flow through the membrane into the cell until the cell swells to a spherical shape, and further, if the concentration gradient of osmolites is large enough, the cell lyses (ruptures) and then reseals again due to line tension (see the attached figure: transition from isotonic to hypotonic conditions). The question is, what is the largest osmotic imbalance (in units of moles/liter, or number of particles/m<sup>3</sup>) which the cell can withstand without rupture?



Hints:

- The stretch modulus of the cell membrane is  $K = 0.16 \text{ J/m}^2$ .
- Lysis occurs when the cell membrane area is expanded by 2%.
- The area of the cell membrane is  $150 \mu\text{m}^2$ .
- Please recall that membrane tension is the force per unit length acting on the cross-section of membrane, and the force arising from membrane tension must oppose the force arising from osmotic pressure.
- Look at the units of stretch modulus.

These might be useful:

Taylor expansion

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

Boltzmann constant  $1.380662 \cdot 10^{-23} \text{ J / K}$

1 amu =  $1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$  (atomic mass unit)

Avogadro's number  $6.022 \cdot 10^{23} \text{ 1/mol}$

permittivity of vacuum  $8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$  (or  $\text{coul}^2/\text{Nm}^2$ )

permittivity of water  $\approx 80$  times that of a vacuum

charge on a proton  $1.6 \cdot 10^{-19} \text{ coul}$

viscosity of water  $\eta = 10^{-3} \text{ kg / ms}$

viscosity of syrup  $\approx 3000$  times that of water

mass density of syrup  $\approx 1.4$  times that of water

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$\frac{dy}{dt} + Ay = B$ , where  $A, B$  are constants, is solved by  $y = y(t_0)e^{At_0}e^{-At} - \frac{B}{A}e^{At_0}e^{-At} + \frac{B}{A}$  ( $t_0 =$  initial time)

Elementary charge:

$e$  is about  $1.6021766208(98) \times 10^{-19} \text{ C}$



## Physics of Biological Physics (MATR332)

University of Helsinki, Spring 2024

Examination: March 08, 2024 (5 exercises; maximum number of points is 30)

As to background information that is allowed during the examination:

- Calculator is ok

Questions are in English but you can write down your answers in English or Finnish.

### Assignment 1 [max. 9 points]

Please consider the below statements and conclude whether they are true, or not. Further, *justify your reasoning*.

- In a system under consideration, there is salt dissolved in a water liquid, interacting with a solid surface. The sodium ions of the salt are adsorbed (attached) to the charged surface. The temperature of the system is low, around 10 degrees Celsius. Now, if the system temperature is allowed to increase to reach room temperature (around 20 degrees Celsius), then changes in this system are capable of producing mechanical work.
- Consider a fish swimming in a lake. The size of the fish suddenly increases by 50%, and at the same time the velocity of the fish decreases by 50%. Despite these changes, the Reynolds number characterizing the motion of the fish remains constant.
- You are working on your MSc thesis project. One of the tasks you need to do is to separate selected molecules (type A) from the other molecules (type B, C, ...) in this solution. To do this, you use sedimentation, and it works very well.
- Consider molecules found on planet X in liquid nitrogen at a temperature of +73 K. Assuming that the forces between the molecules under these conditions on planet X are similar to forces in liquid water at +37 degrees Celsius on planet Earth, then this implies that on Earth these molecules would be almost 10 times bigger than on planet X.
- If you planned to use the equation of state of the ideal gas model to describe the behavior of a weakly interacting system, when the system temperature approaches zero Kelvin, your colleague would say that "no chance, never going to work out". Your colleague would be right.
- pH outside a cell is 7.5. Inside the cell it is 6.5. You consider a water-soluble protein in which there is the alpha-COOH group. This group has  $pK_a = 2.1$ . When the protein is translocated from the extracellular space to the cell's cytosol (from outside to the inside), the alpha-COOH group becomes more protonated.

### Assignment 2 [max. 6 points]

Diffusion of particles is described by the diffusion length  $L_D = (2dDt)^{1/2}$ , where  $d$  is dimensionality (e.g.,  $d = 2$  for 2D motion along a surface),  $D$  is the diffusion coefficient, and  $t$  is time. The diffusion length then describes how far from the origin the particle moves (on average) during a time scale  $t$  if the diffusion coefficient has a value of  $D$ . Now assume that the diffusion coefficient of a membrane protein is  $D = 10^{-12} \text{ cm}^2/\text{s}$  and the protein diffuses in 2D along the plasma membrane that surrounds a cell, whose radius is  $R$ .

- Now we want the protein to diffuse (like a random walker) to the other side of the cell in 60 seconds. Under these circumstances, what should be the radius  $R$  of the cell? [Hint:

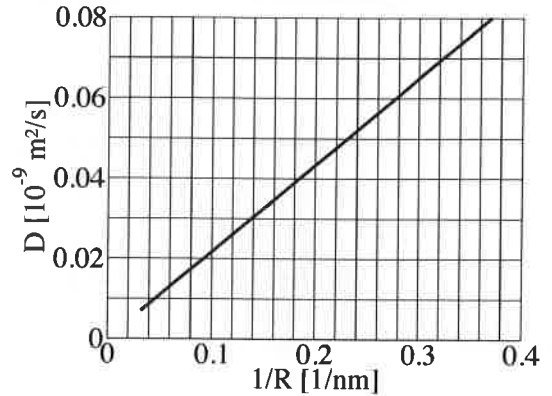
Keep in mind that the protein moves along the membrane.]

- b) How the time to diffuse to the other side of the cell would change if the cell radius would increase by a factor of 10, or by a factor of 100?

**Assignment 3 [max. 6 points]**

Using the Figure 1 on the right, calculate an estimate for the value of the Boltzmann coefficient. [Hint 1: yes, assume diffusion to be Brownian motion. Hint 2: yes, diffusion depends on friction (or viscosity), but how. Hint 3: yes, diffusion depends on temperature, and particle size, but how.]

**Figure:** Diffusion coefficient  $D$  as a function of  $1/R$ , where  $R$  is the radius of the molecule. Diffusion takes place in water, whose viscosity has a value of  $1 \times 10^{-3} \text{ Ns} / \text{m}^2$ . (Adapted from measurements of globular biological molecules in water at a temperature of 20 degrees Celsius.)



**Assignment 4 [max. 5 points]**

1. During the course we discussed how bacteria and fish swim, and how their swimming depends on the Reynolds number. Now, estimate how fast (or slowly) should you swim in water so that you would not have to care about inertia (such that friction would dominate how you move)? Keep again in mind that the (dynamic) viscosity of water is  $1 \times 10^{-3} \text{ Ns} / \text{m}^2$ , and now the temperature is 293 K.
2. Consider two imaginary polymers. Polymer A has a persistence length of 50 nm. Polymer B has a persistence length of 2 nm. Now imagine that you could grab the polymer at two points separated by 10 nm and bend it. Which polymer would be easier to bend and why? If you would use these two polymers as models for single- and double-stranded DNA, which one would be a better model for which? Why?

**Assignment 5 [max. 4 points]**

Consider the Debye (Debye-Huckel) screening length  $\lambda_D$  at the physiological temperature (310 K):  $\lambda_D = (8\pi l_B c_\infty)^{-1/2}$ . Here,  $l_B = e^2 / (4\pi\epsilon\epsilon_0 k_B T)$  is the Bjerrum length,  $e$  is the elementary charge constant,  $\epsilon$  is the dielectric constant,  $k_B$  is the Boltzmann constant,  $T$  is temperature, and  $c_\infty$  is the (bulk) salt concentration. We assume here monovalent salt in water (with relative permittivity around 80).

- Discuss how the Debye screening length depends on the salt concentration?
- What does the Bjerrum length describe?
- What is the screening length for monovalent salt at a concentration of 10 mM (the concentration of NaCl inside a mammalian cell) and 100 mM (the concentration of KCl inside a mammalian cell)? How about divalent salt at a concentration of 50 nM (nanomoles; that is the concentration of calcium inside a mammalian cell)?



- Then consider life inside a crowded cell. Assume water to occupy 70 volume percent of the volume, and 30 volume percent to be taken by macromolecular complexes (such as liposomes). Assume all of these macromolecular complexes to be identical, spherical, and to have exactly the same size (radius equal to 5 nm). Calculate a suggestive value for the distance between the macromolecular complexes (there are many ways to occupy the space by the macromolecular complexes, so consider one of them and just find an educated guess for the distance). Next, how does this distance compare to the Debye screening length you have computed above?

These might be useful:

Taylor expansion

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

Boltzmann constant  $1.380662 \cdot 10^{-23} \text{ J / K}$

1 amu =  $1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$  (atomic mass unit)

Avogadro's number  $6.022 \cdot 10^{23} \text{ 1/mol}$

permittivity of vacuum  $8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$  (or  $\text{coul}^2/\text{Nm}^2$ )

permittivity of water  $\approx 80$  times that of a vacuum

charge on a proton  $1.6 \cdot 10^{-19} \text{ coul}$

viscosity of water  $\eta = 10^{-3} \text{ kg / ms}$

viscosity of syrup  $\approx 3000$  times that of water

mass density of syrup  $\approx 1.4$  times that of water

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$\frac{dy}{dt} + Ay = B$ , where  $A, B$  are constants, is solved by  $y = y(t_0)e^{At_0}e^{-At} - \frac{B}{A}e^{At_0}e^{-At} + \frac{B}{A}$  ( $t_0 = \text{initial time}$ )

Elementary charge:

$e$  is about  $1.6021766208(98) \times 10^{-19} \text{ C}$

Reynold's number  $Re$ . This is one of the few equations/definitions that would be good to remember! But, if you don't, try to remember a little more about this.  $Re$  describes the ratio of inertia to friction, doesn't it. What are the dimensions of  $Re$ ? We remember from the lectures that the value of  $Re$  is affected by the flow speed, the size of the particle/object in the flow, and the friction of the liquid. But there are other things that affect it, too, right? Using dimensional analysis could be smart if you don't already memorize the exact equation.

**MATR343 Mikroskopiamenetelmät materiaalien karakterisoinnissa.**  
**Kurssitentti pe 5.5.2023**

*Vastaa kaikkiin kysymyksiin. Viisi kysymystä, max 6 p/kysymys. Yhteensä max 30 p.*

1. Selitä lyhyesti

- Kuvaaminen  $\text{Ga}^+$  -ioneilla verrattuna kuvaamiseen elektroneilla
- elektronitomografia
- röntgenfluoresenssisaanto

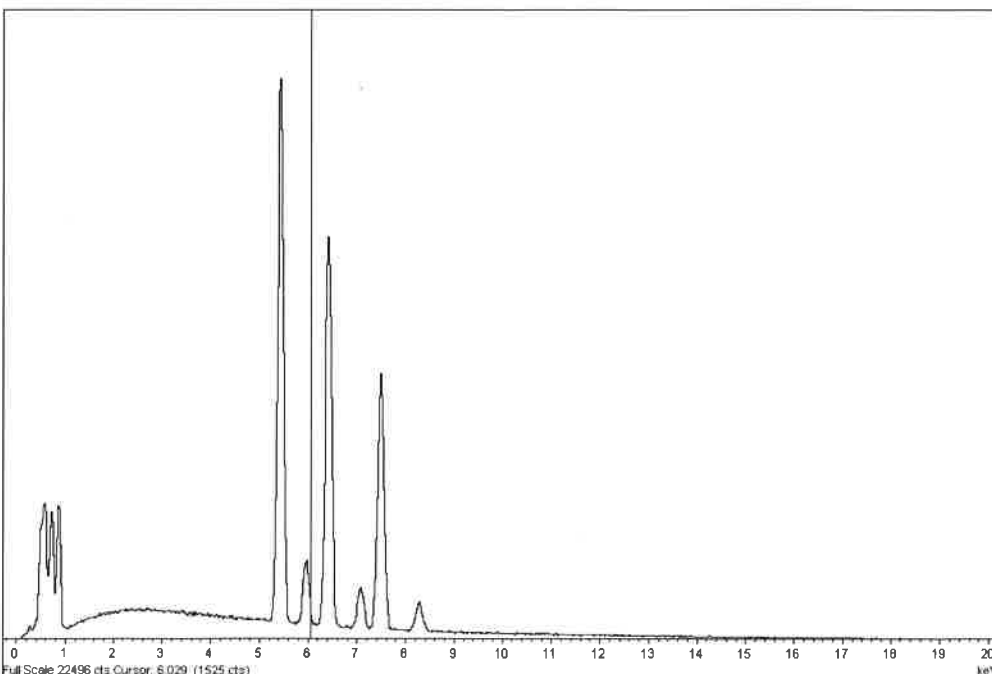
2. Oheinen kuva on BF-TE-kuva ontosta  $\text{Al}_2\text{O}_3$ -nanokuidusta, jonka pinnalla on jalometallinanopartikkeleita. Selitä miksi nanopartikkelit näkyvät kuvassa tummina. Miltä sama näyte näyttäisi BSE-kuvassa? Perustelee.



3. Selitä ESEM:n toimintaperiaate. Piirrä tarvittaessa kuvia. Mitkä ovat tärkeimmät tekniset erot verrattuna perinteiseen SEM:iin? Mitä etuja ESEM:llä on verrattuna tavalliseen SEM:iin? Anna ainakin yksi esimerkki tilanteesta, jossa ESEM:llä saadaan hyödyllisempää informaatiota kuin tavallisella SEM:llä.

4. SPM:t ovat monipuolisia instrumentteja, joita voidaan käyttää pintojen kuvaamiseen ja muuhun karakterisointiin ja muokkaamiseen. Kuvaile kolmen (3) eri SPM-tekniikan perusteet ja selitä mihin niitä käytetään.

5. Alla on SEM-EDS-spektri kiteestä, joka koostuu kolmesta (3) alkuaineesta. Tunnista röntgenenergiataulukon avulla mahdollisimman monta röntgenviivaa.



**MATR343 Microscopy techniques in materials characterization.**

**Course exam Friday 5.5.2023**

*Answer all questions. Five questions, each max 6 p. Total max 30 p.*

1. Explain briefly

- a. imaging with  $\text{Ga}^+$  ions as compared to imaging with electrons
- b. electron tomography
- c. x-ray fluorescence yield

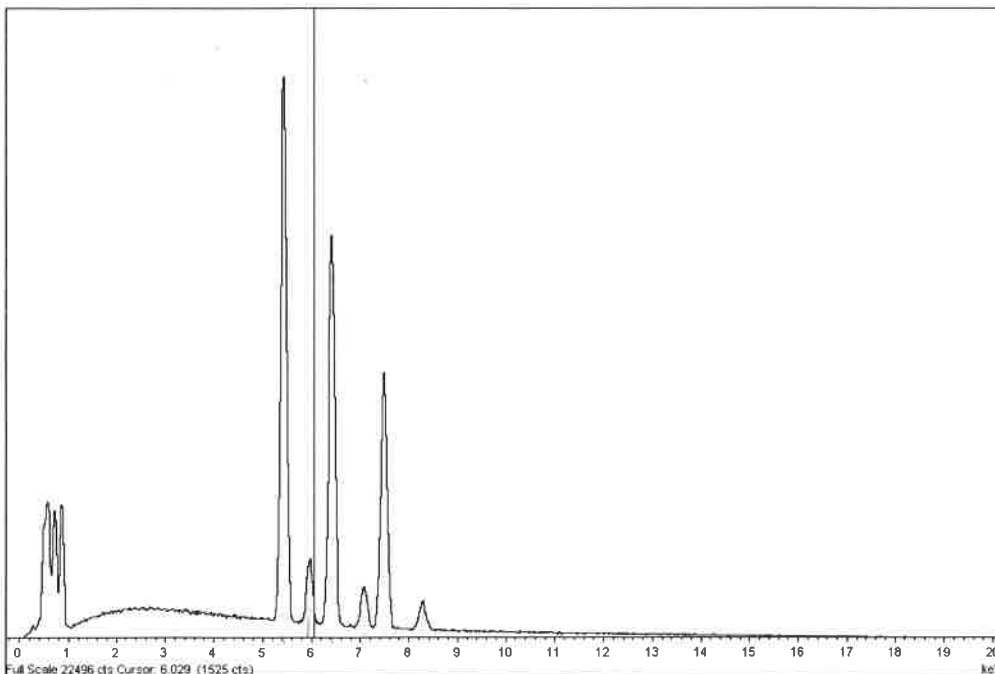
2. The image on the right is a BF-TE image of a hollow  $\text{Al}_2\text{O}_3$  nanofiber decorated with noble metal nanoparticles. Explain why the nanoparticles are shown as dark dots in the image. How would the same sample look in a BSE image? Explain why.



3. Explain the operation principle of ESEM. Use drawings if needed. What are the main technical differences as compared to conventional SEM? What are the advantages as compared to conventional SEM? Give at least one example where ESEM gives more useful information than a conventional SEM.

4. SPM's are versatile instruments that can be used for imaging, other characterization and manipulation of surfaces. Describe the basics of three (3) different SPM techniques and explain what they are used for.

5. Below is a SEM-EDS spectrum of a bulk crystal that consists of three (3) elements. Use the table of x-ray energies to identify as many of the peaks as possible.



No electronic devices (incl. calculators) or notes allowed. Time for exam 4 hours.  
Max score (8+6+4) 18 p

1) Explain briefly the following terms (a few sentences each, max. two pages in total):

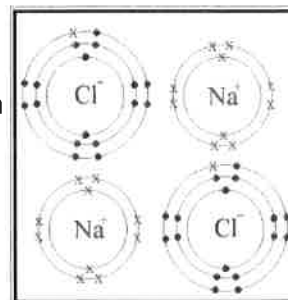
- a) Molecular dynamics and its differences with Monte Carlo (1p)
- b) NVE and NPT ensembles (1p)
- c) Ergodic hypothesis (1p)
- d) Neighbour list skin thickness (1p)
- e) Periodic boundary conditions (1p)
- f) Ehrenfest MD (AIMD) (1p)
- g) Gradient minimization methods (1p)
- h) Group-based cutoff (1p)

2) Answer all questions (roughly max. half a page each.)

- a) How (and why) to select the time step? How does using constraints & constraint algorithms affect the speed of calculation? (2p)
- b) Explain briefly why most materials cannot be accurately modelled by a pair potential (2p)
- c) Explain the principle and properties of the Berendsen vs. Nosé-Hoover thermostats (2p)

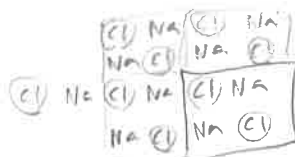
3) A periodic cell of NaCl is shown on the right.

- a) Describe the type of bonding that dominates the atomic interaction.
- b) What is the potential energy of the top-left atom if looking only the atoms in this cell in classical MD? Give attractive and repulsive components separately (no numerical value needed.)
- c) How does the sum of potential energy behave (qualitatively) if you start summing the neighbouring cells (periodic images) to improve the value?
- d) Explain briefly, what methods can be used to circumvent the problem and their basic ideas.



(roughly one page)

(4p)



$$d_2 = 2\sqrt{2}a$$

$$(2a)^2 + a^2 = d^2$$

$$d = \sqrt{4a^2 + a^2} = \sqrt{5a^2}$$

$$= \sqrt{5}a$$

## Basics of Monte Carlo simulations 2023

Final exam 10.03.2023

1. **(6p)** Describe the approaches realized in twisted generalized feedback shift register and Mersenne twister random number generators. Write down the algorithms. What is the purpose of the twists?
2. **(6p)** Describe the Markov chain Monte Carlo algorithm. Can it be used to generate random numbers? If yes, what kind? If not, why do you think so? Motivate your answer. Why is ergodicity of the function important for this method? What is the difference between Metropolis and Metropolis-Hastings method?
3. **(6p)** How to test random number generators? Describe shortly all the tests you remember. What test did you find the most reasonable? Why?
4. **(8p)** How to speed up the convergence of the result of an MC integration with increase of statistics faster than  $1/\sqrt{N}$ ? Prove that the variance of MC estimation of integration of a function is decreasing when the partially stratified method is used.
5. **(6p)** Create a two-dimensional cellular automaton by describing the algorithm for your system to evolve. Write the algorithm in words and translate it into the rule number. Give the number of the rule in the general and totalistic notation. Why are they different?